INGENIEUR-ARCHIV

UNTER MITWIRKUNG DER
GESELLSCHAFT FÜR ANGEWANDTE MATHEMATIK UND MECHANIK
ZUSAMMEN MIT

A. BETZ · K. KLOTTER · E. METTLER · K. v. SANDEN
F. SCHLEICHER · E. SCHMIDT · E. SÖRENSEN

HERAUSGEGEBEN VON

R. GRAMMEL

XXV. BAND DRITTES HEFT 1957

SPRINGER-VERLAG · BERLIN / GÖTTINGEN / HEIDELBERG

Abgeschlossen am 16. April 1957

Postverlagsort Berlin *Preis DM 10,80*

Das

INGENIEUR-ARCHIV

erscheint nach Maßgabe des eingehenden Materials zwanglos in einzeln berechneten Heften, die zu Bänden vereinigt werden.

Die für das Ingenieur-Archiv bestimmten Manuskripte sind unmittelbar an den Herausgeber

Herrn Professor Dr.-Ing. Dr. **R. Grammel**, Stuttgart N, Robert-Bosch-Straße 101

oder an die Herren

Professor Dr.-Ing. Dr. **A. Betz**, Göttingen, Herzberger Landstraße 39 A

Professor Dr.-Ing. **K. Klotter**, Stanford (Calif.), 621 Alvarado Row.

Professor Dr. **E. Mettler**, Karlsruhe-Durlach, Geigersberger Str. 12

Professor Dr.-Ing. **K. v. Sanden**, Karlsruhe-West, Hertzstr. 16, (T. H. West)

Professor Dr.-Ing. **Dr.-Ing. E. h. F. Schleicher**, Dortmund, Plauener Str. 44

Professor Dr.-Ing. **E. Schmidt**, Technische Hochschule, München, Arcisstr. 21

Professor Dr.-Ing. **E. Sörensen**, Augsburg, MAN

einzusenden.

Die zum Druck angenommenen Arbeiten werden, soweit dies drucktechnisch möglich ist, nach der Reihenfolge ihres Eingangs beim Herausgeber veröffentlicht.

Die Mitarbeiter erhalten von ihrer Arbeit zusammen 75 Sonderdrucke unentgeltlich.

Für die Abfassung der Arbeiten wird auf das vom Deutschen Normenausschuß herausgegebene Heft „Gestaltung technisch-wissenschaftlicher Veröffentlichungen" hingewiesen. Die Vorlagen für Abbildungen sind auf besonderen Blättern erwünscht und können entweder in Reinzeichnungen oder in klarverständlichen Handskizzen bestehen; die Beschriftung und nötigenfalls die Reinzeichnung nimmt der Verlag vor.

Mit der Annahme des Manuskriptes erwirbt der Verlag das ausschließliche Verlagsrecht für alle Sprachen und Länder.

Im „Ingenieur-Archiv" erscheinende Arbeiten dürfen vorher an anderer Stelle nicht veröffentlicht sein und auch später nicht anderweitig veröffentlicht werden.

Photographische Vervielfältigungen, Mikrofilme, Mikrophote von ganzen Heften, einzelnen Beiträgen oder Teilen daraus sind ohne ausdrückliche Genehmigung des Verlages nicht gestattet.

Die Wiedergabe von Gebrauchsnamen, Handelsnamen, Warenbezeichnungen usw. in dieser Zeitschrift berechtigt auch ohne besondere Kennzeichnung nicht zu der Annahme, daß solche Namen im Sinne der Warenzeichen und Markenschutz-Gesetzgebung als frei zu betrachten wären und daher von jedermann benutzt werden dürften.

SPRINGER-VERLAG

Heidelberg — Neuenheimer Landstraße 28—30 / Fernsprecher 2 79 01

Berlin W 35 — Reichpietschufer 20 / Fernsprecher Sammel-Nr. 24 92 51

Inhalt:

Seite

Becker, E., Das Anwachsen der Grenzschicht in und hinter einer Expansionswelle. Mit 6 Abbildungen 155

Windels, R., Biegetheorie der Rotationsschale mit flacher, kreisförmiger Erzeugender. Mit 5 Abbildungen 164

Argyris, J. H., Die Matrizentheorie der Statik. Mit 10 Abbildungen 174

Hain, K., Diagonalwinkel-Zuordnungen im Gelenkviereck. Mit 14 Abbildungen 193

Mader, F. W., Beitrag zur Berechnung in Querrichtung durchlaufender Plattenstreifen mit Hilfe *Fourier*scher Integrale. Mit 3 Abbildungen 201

Timme, A., Über die Geschwindigkeitsverteilung in Wirbeln. Mit 20 Abbildungen 205

Woinowsky-Krieger, S., Berichtigung 226

INGENIEUR-ARCHIV

XXV. BAND DRITTES HEFT 1957

Das Anwachsen der Grenzschicht in und hinter einer Expansionswelle

Von **E. Becker**

1. Einleitung. Längs einer ebenen Wand, die an anfangs ruhendes Gas grenzt, laufe eine ebene Verdünnungswelle mit wandparalleler Wellennormale (Abb. 1). Die Dichte ϱ_0, der Druck p_0 und die Schallgeschwindigkeit a_0 des Gases vor der Welle fallen beim Durchgang der Welle an jeder Stelle auf die kleineren Werte ϱ_1, p_1, a_1 hinter der Welle ab. Gleichzeitig wird das Gas parallel zur Wand in der zur Wellenausbreitung entgegengesetzten Richtung mit der Geschwindigkeit U in Bewegung gesetzt; U nimmt hinter der Welle einen konstanten Wert $-U_1$ an. Beim Fortschreiten flacht sich die Welle laufend ab, Wellenkopf und Wellenende rücken immer weiter auseinander.

An der ebenen Wand entsteht nach Durchgang des Wellenkopfes eine Grenzschicht, in der die Reibungseinflüsse maßgebend sind. In der vorliegenden Arbeit werden für das Anwachsen der Grenzschichtdicke in laminarer und turbulenter Strömung einfache Näherungsformeln gegeben werden, die sich auf den Impulssatz gründen. Eine Kenntnis dieses Wachstums ist bei verschiedenen Anordnungen von Interesse, z. B. beim Stoßwellenrohr[1,2] und bei dem von *H. Ludwieg* vorgeschlagenen Rohrwindkanal[3]. Außerdem lassen sich durch einfache Veränderungen in den nachfolgenden Rechnungen auch Grenzschichten bei Strömungsvorgängen in flachem Wasser behandeln, was im Hinblick auf die Anwendbarkeit der Flachwasseranalogie in der Gasdynamik einige Bedeutung hat[1,4].

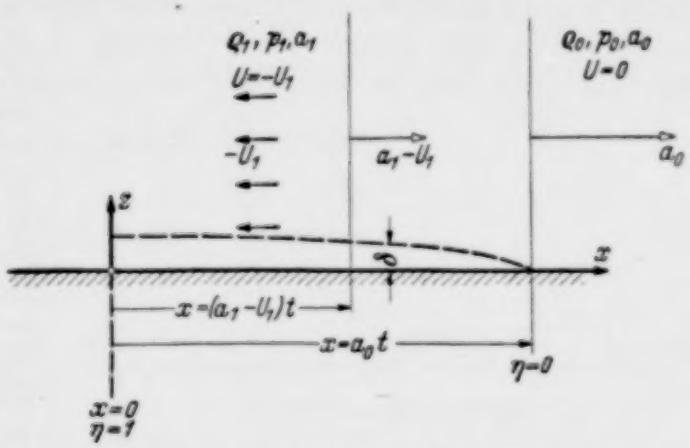


Abb. 1. Expansionswelle an einer ebenen Wand; Koordinatensystem und Bezeichnungen.

2. Grundgleichungen und Vernachlässigungen. Zur Zeit $t=0$ sei die ebene Verdünnungswelle an der Stelle $x=0$ der ebenen Wand konzentriert, für $t>0$ laufe sie nach rechts in das Gebiet $x>0$ hinein, der Wellenkopf mit der Geschwindigkeit a_0, das Wellenende mit a_1-U_1 (Abb. 1). Dieser Fall ist gerade im Rohrwindkanal verwirklicht (wenn man hier einmal davon absieht, daß die Rohrwand dort im Gegensatz zu unserer ebenen Wand gekrümmt ist). Bekanntlich sind Geschwindigkeit U und Dichte ϱ in der Welle an der Stelle x und zur Zeit t Funktionen einer einzigen Variablen η, wobei

$$\eta = \frac{a_0 t - x}{a_0 t} = 1 - \frac{x}{a_0 t} \tag{1}$$

ist; η bedeutet also den mit $a_0 t$ dimensionslos gemachten Abstand vom Wellenkopf. Für ein Gas mit $\varkappa = 1{,}4$ gilt:

$$\frac{U}{a_0} = -\frac{5}{6}\eta \tag{2}$$

(das negative Vorzeichen steht, weil die Geschwindigkeit nach links gerichtet ist) und

$$\frac{\varrho}{\varrho_0} = \left(1 - \frac{\eta}{6}\right)^5. \tag{3}$$

---

[1] *C. Donaldson* u. *R. D. Sullivan*, The effect of wall friction on the strength of shock waves in tubes and hydraulic jumps in channels, NACA TN 1942 (1949).

[2] *P. W. Huber* u. *D. R. McFarland*, Boundary layer growth and shock attenuation in a shock tube with roughness, NACA TN 3627 (1956).

[3] *H. Ludwieg*, Z. Flugwiss. 3 (1955), S. 206.

[4] *H. Bömelburg*, Die praktische Anwendung der Wasseranalogie in quantitativer Form auf spezielle Probleme der Gasdynamik, Mitt. Max-Planck-Inst. Strömungsf. Nr. 10 (1954).

Der Berechnung der Grenzschicht wird der Impulssatz für instationäre, kompressible Grenzschichten zugrunde gelegt, wie er sich nach Routinemethoden aus den Grenzschichtgleichungen durch Integration herleiten läßt:

$$U \frac{\partial}{\partial t} \int_0^\infty (\varrho - \varrho_\infty)\, dz + \frac{\partial}{\partial t}(\varrho_\infty U \delta^*) + \frac{\partial U}{\partial x} \varrho_\infty U \delta^* + \frac{\partial}{\partial x}(\varrho_\infty U^2 \vartheta) = \tau_W . \tag{4}$$

Dabei ist z die Koordinate senkrecht zur Wand, ϱ_∞ und U sind die Werte von Dichte und Geschwindigkeit in weiter Entfernung von der Wand, τ_w ist die Wandschubspannung, δ^* und ϑ sind folgendermaßen definiert:

$$\delta^* = \int_0^\infty \left(1 - \frac{\varrho\, u}{\varrho_\infty U}\right) dz \quad \text{(Verdrängungsdicke)}, \tag{5}$$

$$\vartheta = \int_0^\infty \frac{\varrho\, u}{\varrho_\infty U}\left(1 - \frac{u}{U}\right) dz \quad \text{(Impulsverlustdicke)}, \tag{6}$$

wobei ϱ die Dichte, u die Geschwindigkeit im Abstand z von der Wand bedeuten.

Für die weitere Rechnung werden folgende Annahmen gemacht:

I. Die *Mach*zahl M der stationären Strömung hinter der Welle sei nicht zu groß und bleibe jedenfalls unter dem Wert 1 (beim Rohrwindkanal ist dies der Fall, da hier M im Rohr den Wert 1 nicht überschreiten kann. Man darf dann wohl annehmen, daß über die ganze Grenzschichtdicke mit genügender Näherung $\varrho = \varrho_\infty$ ist. Bei stationärer Strömung ist dies bekanntlich der Fall, da dort der durch $\varrho \neq \varrho_\infty$ gekennzeichnete Einfluß der Kompressibilität für kleine Machzahlen vernachlässigbar ist. Unsere instationäre Grenzschicht kann nun aber hinsichtlich Druckänderungen über die Grenzschichtdicke als quasistationär behandelt werden, wenn nur die Grenzschichtdicke klein ist gegenüber der Ausdehnung der Welle in x-Richtung. Die charakteristische Zeit, in der sich Druckänderungen über die Grenzschichtdicke ausgleichen können, ist nämlich dann viel kleiner als die charakteristische Zeit für Druckänderungen außerhalb der Grenzschicht; jene ist durch das Verhältnis der Grenzschichtdicke zur Schallgeschwindigkeit, diese durch das Verhältnis der Ausdehnung der Welle in x-Richtung zur Schallgeschwindigkeit gegeben[1]. — Damit entfällt das erste Glied in (4). Für das entsprechende Problem bei Flachwasserströmungen ist die Vernachlässigung übrigens exakt richtig, da sich die Dichte des Wassers ja nicht ändert.

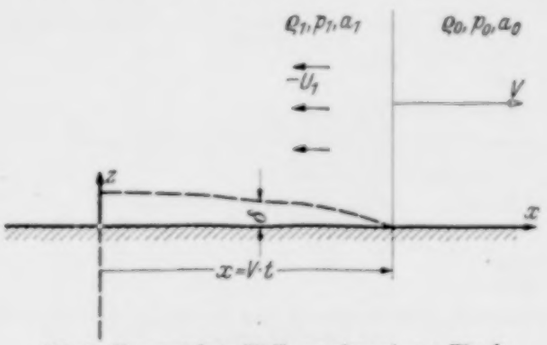


Abb. 2. Konzentrierte Welle an einer ebenen Wand; Koordinatensystem und Bezeichnungen.

II. Das Verhältnis von Impulsverlustdicke und Verdrängungsdicke sei konstant und die Wandschubspannung hänge nur von der Grenzschichtdicke ab (also von δ^* bzw. ϑ). Diese an sich recht einschneidende Annahme dürfte zu nicht allzu großen Fehlern führen, da in der betrachteten Strömung in Strömungsrichtung durchgehend Druckabfall herrscht[2]. Sicherlich geben trotz dieser Vernachlässigung die weiter unten hergeleiteten Näherungsformeln die hier wesentlichen Effekte der Instationarität und des starken Abfalls der Dichte mit wachsender Entfernung vom Wellenkopf richtig wieder, da dieser Einfluß bedeutend größer ist als ein durch die Annahme II zu erwartender Fehler.

3. Laminare und turbulente Grenzschicht hinter einer konzentrierten Welle. Zur späteren Anwendung wird zunächst eine vereinfachte Strömung betrachtet: Die Verdünnungswelle sei während ihrer ganzen Bewegung auf eine scharfe Unstetigkeit konzentriert, deren Fortpflanzungsgeschwin-

[1] Die Voraussetzung $\varrho = \varrho_\infty$ bedeutet auch $T = T_\infty$ über die ganze Grenzschichtdicke. In diesem Fall findet kein Wärmeübergang an die Wand statt. Bei gut wärmeleitender Rohrwand ist diese Voraussetzung verletzt und für größere *Mach*zahlen sind dann Abweichungen von den folgenden Ergebnissen zu erwarten. Für ideal wärmeleitende Wand, d. h. konstante Wandtemperatur T_0 kann man bei Annahme eines Temperaturprofils und entsprechender Berücksichtigung des ersten Gliedes in (4) auch den Wärmeübergang berücksichtigen. Diese Rechnung wurde vom Verf. ebenfalls durchgeführt und wird demnächst i. a. Zusammenhang veröffentlicht.

[2] Vgl. hierzu Ziff. 7.

digkeit mit V bezeichnet wird (Abb. 2). Man kann den ganzen Vorgang auf eine stationäre Grenzschichtströmung zurückführen mit nicht verschwindender Wandgeschwindigkeit, indem man die Geschwindigkeit $-V$ überlagert. Dieser Fall wurde vom Verfasser 1951 nach dem Impulssatz behandelt[1]. Eine exakte Behandlung, wie sie von *H. Mirels*[2] gegeben wurde, führt für laminare Grenzschichten auf eine modifizierte Blasiusgleichung. Unsere Annahme II ist hier gut erfüllt, da die Geschwindigkeitsprofile affin sind.

Als Vorbereitung auf die Rechnungen in Ziff. 4 wird hier folgender, an sich recht umständlicher Weg eingeschlagen: In konsequenter Auslegung der Annahme II (Ziff. 2) wählt man ein Geschwindigkeitsprofil, nämlich

$$\frac{u}{U} = \frac{z}{\delta}\left(2 - \frac{z}{\delta}\right) \quad \text{für} \quad 0 \leq z \leq \delta\,; \tag{7}$$

dann wird

$$\delta^* = \frac{1}{3}\delta\,, \tag{8}$$

$$\vartheta = \frac{2}{15}\delta\,, \tag{9}$$

$$\frac{\tau_w}{\varrho U^2} = \frac{2\mu}{\varrho U \delta} \tag{10}$$

(μ = dynamische Zähigkeit). Der Impulssatz (4) ergibt dann mit $U = -U_1$ und den Abkürzungen

$$\varphi = \delta^2\,, \qquad \frac{x}{U_1} = s \tag{11}$$

folgende Gleichung:

$$\frac{1}{6}\frac{\partial \varphi}{\partial t} - \frac{1}{15}\frac{\partial \varphi}{\partial s} = 2\,\nu_1\,, \tag{12}$$

wobei $\nu_1 = \mu_1/\varrho_1$ ist. Die Anfangsbedingung ist

$$\varphi = 0 \quad \text{für} \quad s = \frac{V}{U_1}t\,, \tag{13}$$

$$\text{d. h.} \quad \delta = 0 \quad \text{für} \quad x = V t\,.$$

Die Gleichung (12) kann nach der üblichen Methode durch Zurückführung auf folgendes System gewöhnlicher Differentialgleichungen gelöst werden[3]:

$$\dot{t} = \frac{1}{6}\,, \qquad \dot{s} = -\frac{1}{15}\,, \qquad \dot{\varphi} = 2\,\nu_1\,. \tag{14}$$

Dabei bedeuten Punkte Differentiation nach einem Parameter, der sich leicht durch Division je zweier der Gleichungen (14) mit folgendem Ergebnis eliminieren läßt:

$$\frac{ds}{dt} = -\frac{2}{5}\,, \tag{15}$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = 12\,\nu_1\,. \tag{16}$$

Abb. 3. s/t-Ebene für eine konzentrierte Welle mit charakteristischen Grundkurven.

Gleichung (15) definiert eine Schar von Geraden in der (s, t)-Ebene („charakteristische Grundkurven"), Gleichung (16) gibt das Wachstum von φ längs dieser Geraden (Abb. 3). Die Lösung $\varphi(s, t)$ ist in diesem ganz einfachen Falle offenbar eine durch $s = (V/U_1)\,t$ gehende Ebene. Man kann die Gleichung dieser Ebene sofort der geometrischen Anschauung entnehmen. Sie ist

$$\delta^2 = \varphi = 12\,\nu_1\left(t - \frac{x}{V}\right)\frac{1}{1 + \frac{2}{5}\frac{U_1}{V}}\,. \tag{17}$$

Durch Einführung der Zeit τ, wobei

$$\tau = t - \frac{x}{V} \tag{18}$$

[1] *E. Becker*, Merkwürdige Erscheinungen beim Wasserschwall, Dipl.-Arbeit, Göttingen 1951; siehe auch *E. Becker*, Ing.-Arch. 21 (1953), S. 42.

[2] *H. Mirels*, Laminar boundary layer behind shock advancing into stationary fluid, NACA TN 3401 (1955)

[3] *Courant-Hilbert*, Methoden der mathematischen Physik. Bd. II, Kap. 1 u. 2, Berlin 1937.

ist, also derjenigen Zeit, die an der Stelle x vergangen ist, seit die Welle diesen Ort überstrichen hat, läßt sich aus (17) folgender Ausdruck für δ entnehmen:

$$\delta = \sqrt{12\,\nu_1\,\tau}\; f_l\left(\frac{U_1}{V}\right) \tag{19}$$

mit

$$f_l\left(\frac{U_1}{V}\right) = \frac{1}{\left(1 + \frac{2}{5}\,\frac{U_1}{V}\right)^{1/2}}. \tag{20}$$

Für $U_1/V = 0$ erhält man $\delta = \sqrt{12\,\nu_1\,\tau}$, bzw. $\delta^* = \sqrt{4/3}\,\sqrt{\nu_1\,\tau}$. Dies entspricht der Lösung für die ruckartig mit der Geschwindigkeit U_1 in Bewegung gesetzte ebene Wand im inkompressiblen Medium, die sich auch exakt berechnen läßt (nach *Rayleigh*[2]). Der Abminderungsfaktor $f_l(U_1/V)$, der in Abb. 4 dargestellt ist, trägt der endlichen Wellengeschwindigkeit V Rechnung.

In dem anderen Grenzfall $U_1/V \to \infty$ erhält man mit $V\tau = x$: $\delta = \sqrt{30\,\nu\,x/U_1}$. Dies entspricht der Grenzschicht an einer mit U_1 angeströmten ebenen Platte in der Entfernung x von der Vorderkante.

Für die turbulente Grenzschicht werden folgende Näherungsformeln benutzt[1]:

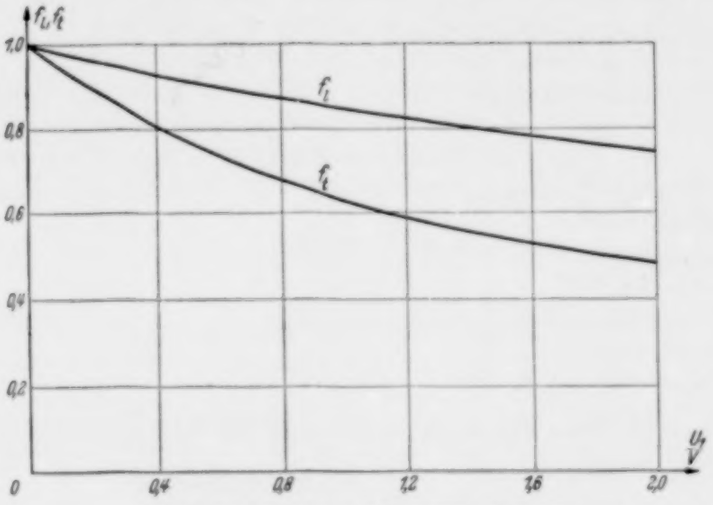


Abb. 4. Funktionen f_l und f_t Gl. (20) und Gl. (26).

$$\frac{u}{U} = \left(\frac{z}{\delta}\right)^{1/7} \text{ für } 0 \leq z \leq \delta, \tag{21}$$

$$\delta^* = \frac{1}{8}\,\delta, \tag{22}$$

$$\vartheta = \frac{7}{72}\,\delta, \tag{23}$$

$$\frac{\tau_w}{\varrho\,U^2} = 0{,}0125\,.\left(\frac{U\,\vartheta}{\nu}\right)^{-1/4}. \tag{24}$$

Durch eine ganz analoge Rechnung wie oben erhält man hier

$$\delta = 0{,}303\left(\frac{\nu_1}{U_1^2\,\tau}\right)^{1/5} U_1\,\tau\,f_t\left(\frac{U_1}{V}\right). \tag{25}$$

Der Wert

$$\delta = 0{,}303\left(\frac{\nu_1}{U_1^2\,\tau}\right)^{1/5} U_1\,\tau$$

entspricht der Grenzschicht an einer ruckartig in Bewegung gesetzten ebenen Wand. Der Abminderungsfaktor f_t ist ebenfalls in Abb. 4 dargestellt, er ist durch

$$f_t\left(\frac{U_1}{V}\right) = \frac{1}{\left(1 + \frac{7}{9}\,\frac{U_1}{V}\right)^{4/5}} \tag{26}$$

gegeben. Für $U_1/V \to \infty$ erhält man hier genauso wie bei der laminaren Strömung die Grenzschicht an einer stationär mit U_1 angeströmten ebenen Platte, wenn $x = V\tau$ die Entfernung von der Vorderkante bedeutet.

4. Laminare Grenzschicht in der Expansionswelle. Der Impulssatz (4) wird nun (unter Vernachlässigung des ersten Gliedes auf der linken Seite) auf die laminare Grenzschicht in der Expansionswelle angewandt. Unter Benutzung von (8), (9) und (10) und nach Einführung der abhängigen Variablen

$$\varphi = \left(\frac{U\,\varrho}{a_0\,\varrho_0}\,\delta\right)^2 \tag{27}$$

ergibt eine längere, aber elementare Rechnung aus dem Impulssatz (4)

$$\frac{1}{6\,a_0}\,\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{7}{18}\,\frac{\varphi}{a_0\,t} + \frac{1}{15}\,\frac{U}{a_0}\,\frac{\partial\varphi}{\partial x} = \frac{2\,\mu}{a_0\,\varrho_0}\,\frac{\varrho}{\varrho_0}\left(\frac{U}{a_0}\right)^2. \tag{28}$$

[1] *H. Schlichting*, Grenzschichttheorie, 1. Aufl., S. 63. Karlsruhe 1951.
[2] *H. Schlichting*, a. a. O., S. 393.

Nun ist es vorteilhaft, neue unabhängige Variablen in (28) einzuführen, nämlich die durch (1) definierte Größe

$$\eta = 1 - \frac{x}{a_0\, t}\,.$$

Die Koordinate x werde beibehalten, der konsequenten Schreibweise wegen aber in ξ umbenannt: $\xi = x$. Für die Ableitungen gilt dann

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial \xi} - \frac{1-\eta}{\xi}\frac{\partial}{\partial \eta}\,, \qquad \frac{1}{a_0}\frac{\partial}{\partial t} = \frac{(1-\eta)^2}{\xi}\frac{\partial}{\partial \eta}\,. \tag{29}$$

Aus (28) ergibt sich dann mit (2) und (3)

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \eta}\cdot\frac{1-\eta}{\eta\,\xi}(3-2\,\eta) - \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} + \frac{1-\eta}{\eta\,\xi}\varphi = \frac{\mu_0}{a_0\,\varrho_0}\frac{\mu}{\mu_0}\left(1-\frac{\eta}{6}\right)^5 25\,\eta^2\,. \tag{30}$$

Diese Gleichung ist mit der Anfangsbedingung $\varphi = 0$ für $\eta = 0$ zu lösen. Das dem System (14) in Ziff. 3 entsprechende Gleichungssystem ist für die partielle Differentialgleichung (30)

$$\dot{\eta} = \frac{1-\eta}{\xi\,\eta}(3-2\,\eta)\,, \tag{31}$$

$$\dot{\xi} = -1\,, \tag{32}$$

$$\dot{\varphi} + \frac{1-\eta}{\xi\,\eta}\varphi = \frac{\mu_0}{a_0\,\varrho_0}\frac{\mu}{\mu_0}\cdot\left(1-\frac{\eta}{6}\right)^5 25\,\eta^2\,. \tag{33}$$

Aus (31) und (32) folgt als Gleichung für die Schar der charakteristischen Grundkurven

$$\frac{d\eta}{d\xi} = -\frac{1-\eta}{\xi\,\eta}(3-2\,\eta)\,, \tag{34}$$

mit der Lösung

$$\xi = \frac{C\,(1-\eta)}{(3-2\,\eta)^{3/2}}\,. \tag{35}$$

C ist der Scharparameter; eine einzelne Kurve der Schar ist durch einen bestimmten Wert von C festgelegt. Längs einer solchen charakteristischen Grundkurve gilt für φ die aus (32) und (33) folgende, gewöhnliche Differentialgleichung:

$$\frac{d\varphi}{d\eta} + \frac{7}{3-2\,\eta}\varphi = \frac{\mu}{\mu_0}\frac{\mu_0}{a_0\,\varrho_0}\cdot\left(1-\frac{\eta}{6}\right)^5\frac{25\,\eta^2}{(3-2\,\eta)}\frac{\xi}{1-\eta}\,. \tag{36}$$

Auf einer charakteristischen Grundkurve ist ξ aber durch (35) gegeben und nach Einsetzen in (36) kann man durch einfache Quadratur sofort φ bestimmen. Das Ergebnis dieser Rechnung, das die Randbedingung $\varphi = 0$ für $\eta = 0$ erfüllt, ist

$$\varphi = \frac{\mu_0}{a_0\,\varrho_0}\,25\,C\,(3-2\,\eta)^{7/2}\int_0^{\eta}\frac{\mu/\mu_0\left(1-\frac{\eta}{6}\right)^5\cdot\eta^2}{(3-2\,\eta)^6}\,d\eta\,. \tag{37}$$

Unter dem Integral steht der Ausdruck μ/μ_0. Hierfür darf man in unserer Näherung sicher die *Sutherland*sche Formel benutzen[1], die die Zähigkeit eines Gases in Abhängigkeit von der Temperatur gibt:

$$\frac{\mu}{\mu_0} = \left(\frac{T}{T_0}\right)^{1/2}\frac{1{,}505}{1+\frac{0{,}505}{T/T_0}}\,. \tag{38}$$

In der Verdünnungswelle gilt nun

$$\frac{T}{T_0} = \left(1-\frac{\eta}{6}\right)^2. \tag{39}$$

Setzt man (39) in (38) ein und beschränkt sich auf eine lineare Näherung, so wird

$$\frac{\mu}{\mu_0} = 1 - 0{,}28\,\eta\,. \tag{40}$$

---

[1] *A. H. Shapiro*, The dynamics and thermodynamics of compressible fluid flow, Bd. II, S. 1059, New York 1954.

In (37) wird weiterhin C nach (35) durch ξ und η ersetzt. Wenn man dann beachtet, daß nach der Definition

$$\frac{\xi}{1-\eta} = a_0\, t \tag{41}$$

ist und daß φ durch (27) definiert ist, so ergibt sich nach einiger Umrechnung

$$\delta^2 = \nu_0\, t\, g_l(\eta) \tag{42}$$

mit

$$g_l(\eta) = 36\, \frac{(3-2\,\eta)^5}{\left(1-\frac{\eta}{6}\right)^{10} \eta^2} \int_0^{\eta} \frac{(1-0{,}28\,\eta)\left(1-\frac{\eta}{6}\right)^5}{(3-2\,\eta)^6}\, \eta^2\, d\eta\,. \tag{43}$$

Die Funktion $g_l(\eta)$ ist in Abb. 5 im Intervall $0 \leq \eta \leq 1$ aufgetragen[1] ($\eta = 1$ entspricht gerade der *Mach*zahl $M = 1$; denn zwischen η und M besteht die Beziehung $M = 5\,\eta/(6-\eta)$).

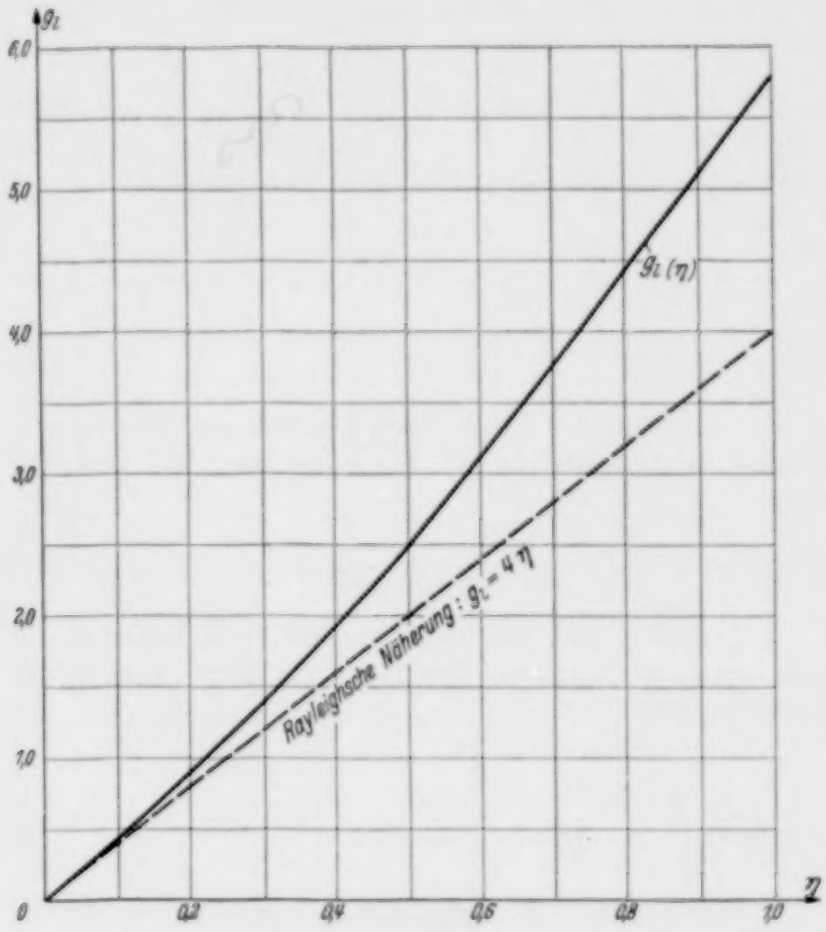


Abb. 5. Funktion $g_l(\eta)$ mit der Näherung (44).

In der Umgebung von $\eta = 0$ läßt sich g_l linear annähern:

$$g_l(\eta) \approx 4\,\eta\,. \tag{44}$$

Daher wird für sehr kleine η

$$\delta^2 \approx 4\,\nu_0\, t\,\eta\,. \tag{45}$$

Führt man wieder nach (18) die Zeit τ ein (mit $V = a_0$), die seit Vorüberstreichen des Wellenkopfes an einer bestimmten Stelle x verstrichen ist, so erhält man aus (45)

$$\delta^2 \approx 4\,\nu_0\,\tau\,. \tag{46}$$

Dies entspricht der *Rayleigh*schen Lösung an einer mit zeitlich linear anwachsender Geschwindigkeit, also konstanter Beschleunigung in Bewegung gesetzten ebenen Wand. Die Lösung läßt sich auf einfachem Wege direkt aus der Bewegungsgleichung unter Vernachlässigung der konvektiven Glieder herleiten bzw. direkt aus dem in diesem Falle verkürzten Impulssatz

$$\frac{\partial}{\partial t}\,(\varrho_0\, U\, \delta^*) = \tau_w\,. \tag{47}$$

Mit (8) und (10) und mit $\dot{U}/U = 1/t$ (bei linearer Zeitabhängigkeit von U) erhält man

$$\frac{\partial \delta^2}{\partial t} + 2\,\frac{\delta^2}{t} = 12\,\nu_0\,, \tag{48}$$

und hieraus ergibt sich sofort (46), wenn man t durch τ ersetzt.

Die Näherung (44) für $g_l(\eta)$ ist zusammen mit $g_l(\eta)$ in Abb. 5 aufgetragen. Die Funktion $g_l(\eta)$ weicht von der Näherung nach oben, d. h. im Sinne erhöhter Grenzschichtdicke, ab. Der Einfluß der endlichen Wellengeschwindigkeit allein ließe nach Ziff. 3 bzw. Abb. 4 eine Abweichung nach unten, d. h. in Richtung kleinerer Grenzschichtdicken, vermuten, da $f_l < 1$ ist. Diesem Effekt wirkt aber der Abfall von Dichte und kinematischer Zähigkeit mit wachsender Entfernung vom Wellenkopf (wachsendem η) entgegen und treibt die Grenzschichtdicke über die *Rayleigh*sche Näherung hinaus.

5. Zusammenschluß der Grenzschicht in der Expansionswelle mit der Grenzschicht hinter der Welle. Das Wellenende sei durch den Wert η_1 festgelegt. Die Grenzschichtdicke δ_1 am Wellenende ist dann durch $\delta_1^2 = \nu_0\, t\, g_l(\eta_1)$ gegeben. Hinter der Expansionswelle ist der Verlauf der Grenz-

[1] Für die Berechnung der Funktion $g_l(\eta)$ sowie auch von $g_t(\eta)$ danke ich Herrn Dr. *E. Martensen*.

schichtdicke durch (17) bestimmt, wenn man dort V geeignet wählt, nämlich derart, daß am Ort des Wellenendes die aus (17) folgende Grenzschichtdicke mit δ_1 übereinstimmt. Dies wird auf folgende Weise erreicht: Gleichung (17) ergibt

$$\delta^2 = 12\,\nu_1\,t\left(1-\frac{x}{a_0\,t}\,\frac{a_0}{U_1}\,\frac{U_1}{V}\right) f_l^2\left(\frac{U_1}{V}\right). \tag{49}$$

Am Wellenende ist $x/(a_0\,t) = 1-\eta_1$ und $a_0/U_1 = 6/(5\,\eta_1)$, also

$$\delta^2 = 12\,\nu_1\,t\left[1-(1-\eta_1)\,\frac{6}{5\,\eta_1}\,\frac{U_1}{V}\right] f_l^2\left(\frac{U_1}{V}\right). \tag{50}$$

Wenn dies mit δ_1^2 übereinstimmen soll, muß folgende Gleichung gelten:

$$12\,\nu_1\left[1-(1-\eta_1)\,\frac{6}{5\,\eta_1}\,\frac{U_1}{V}\right] f_l^2\left(\frac{U_1}{V}\right) = \nu_0\,g_l(\eta_1)\,. \tag{51}$$

Diese Gleichung kann für vorgegebenes η_1 nach U_1/V aufgelöst werden. Unter Benutzung des Ausdrucks (20) für f_l erhält man

$$\frac{U_1}{V} = \frac{1-\dfrac{\nu_0}{12\,\nu_1}\cdot g_l(\eta_1)}{\dfrac{\nu_0}{30\,\nu_1}\,g_l(\eta_1)+\dfrac{6\,(1-\eta_1)}{5\,\eta_1}}\,. \tag{52}$$

Damit liegt auch die Grenzschicht hinter der Expansionswelle fest.

6. Turbulente Grenzschicht in der Expansionswelle. Analog zu der nunmehr etwas ausführlicher dargelegten Abschätzung für die laminare Grenzschicht läßt sich auch die turbulente Grenzschicht näherungsweise erfassen. Die Rechnungen verlaufen ganz den obigen Rechnungen im laminaren Fall entsprechend, so daß sie hier nur in großen Schritten wiedergegeben werden sollen:

Man geht mit den Beziehungen (20) bis (23) in den Impulssatz (4) ein (in dem wieder das erste Glied auf der linken Seite vernachlässigt wird) und führt als abhängige Variable

$$\varphi = \left(\frac{\varrho\,|U|}{\varrho_0\,a_0}\,\delta\right)^{5/4} \tag{53}$$

ein. Die unabhängigen Variablen werden wie bei der laminaren Grenzschicht als $\xi = x$ und $\eta = 1-x/(a_0\,t)$ gewählt. — An sich gelten die Beziehungen (20) bis (23) nur für turbulente Grenzschichten ohne Druckänderung in guter Näherung. Aber entsprechend dem in Ziff. **2** zur Begründung der Annahme II Gesagten darf man annehmen, daß diese Näherung auch in unserem Falle noch ausreicht, um die hier wesentlichen Effekte der Instationarität und der Dichteänderung mit wachsender Entfernung vom Wellenkopf zu erfassen. Eine längere, elementare Umformung von (4) ergibt dann für φ die der Gleichung (30) entsprechende Beziehung

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\eta}\,\frac{1-\eta}{\xi\,\eta}\left(1-\frac{19}{54}\eta\right)-\frac{35}{54}\,\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}+\frac{100}{54}\,\frac{1-\eta}{\xi\,\eta}\,\varphi = 0{,}155\left(1-\frac{\eta}{6}\right)^5\eta\left(\frac{\mu}{\mu_0}\right)^{1/4}\left(\frac{\mu_0}{\varrho_0\,a_0}\right)^{1/4}. \tag{54}$$

Die charakteristischen Grundkurven sind hier durch

$$\xi = \frac{C\,(1-\eta)}{\left(1-\dfrac{19}{54}\,\eta\right)^{\frac{54}{19}}} \tag{55}$$

gegeben, und längs dieser Kurven gilt für φ

$$\frac{d\varphi}{d\eta}+\frac{100}{54}\,\frac{\varphi}{1-\dfrac{19}{54}\,\eta} = 0{,}155\,C\left(1-\frac{\eta}{6}\right)^5\frac{\eta^{\frac{73}{19}}}{\left(1-\dfrac{19}{54}\,\eta\right)^{19}}\left(\frac{\mu}{\mu_0}\right)^{1/4}\left(\frac{\nu_0}{a_0}\right)^{1/4}. \tag{56}$$

Die Lösung von (56) wird unter Berücksichtigung von (40), (53) und (55) und der Anfangsbedingung $\varphi = 0$ für $\eta = 0$

$$\delta^{5/4} = a_0\,t\left(\frac{\nu_0}{a_0}\right)^{1/4} g_t(\eta)\,, \tag{57}$$

mit

$$g_t(\eta) = 0{,}197\,\frac{\left(1-\frac{19}{54}\eta\right)^{\frac{154}{19}}}{\left(1-\frac{\eta}{6}\right)^{\frac{25}{4}}\eta^{5/4}}\int_0^{\eta}\frac{(1-0{,}07\,\eta)\left(1-\frac{\eta}{6}\right)^{5}}{\left(1-\frac{19}{54}\eta\right)^{\frac{173}{19}}}\,\eta^2\,d\eta\,. \tag{58}$$

Die Funktion $g_t(\eta)$ ist in Abb. 6 dargestellt. Für $\eta \approx 0$ wird $g_t(\eta)$ angenähert durch

$$g_t(\eta) \approx 0{,}066\,\eta^{7/4}\,. \tag{59}$$

Man erhält dann durch Einführung von τ (siehe Ziff. 3 bzw. 4) für $\delta^{5/4}$ den Ausdruck

$$\delta^{5/4} \approx 0{,}075\,[U(\tau)]^{3/4}\,\nu_0^{1/4}\,\tau\,. \tag{60}$$

Dies entspricht der Lösung für die turbulente Grenzschicht an einer mit konstanter Beschleunigung in Bewegung gesetzten ebenen Wand. Die Lösung (60) läßt sich analog wie bei der laminaren Grenzschicht sofort aus dem verkürzten Impulssatz herleiten.

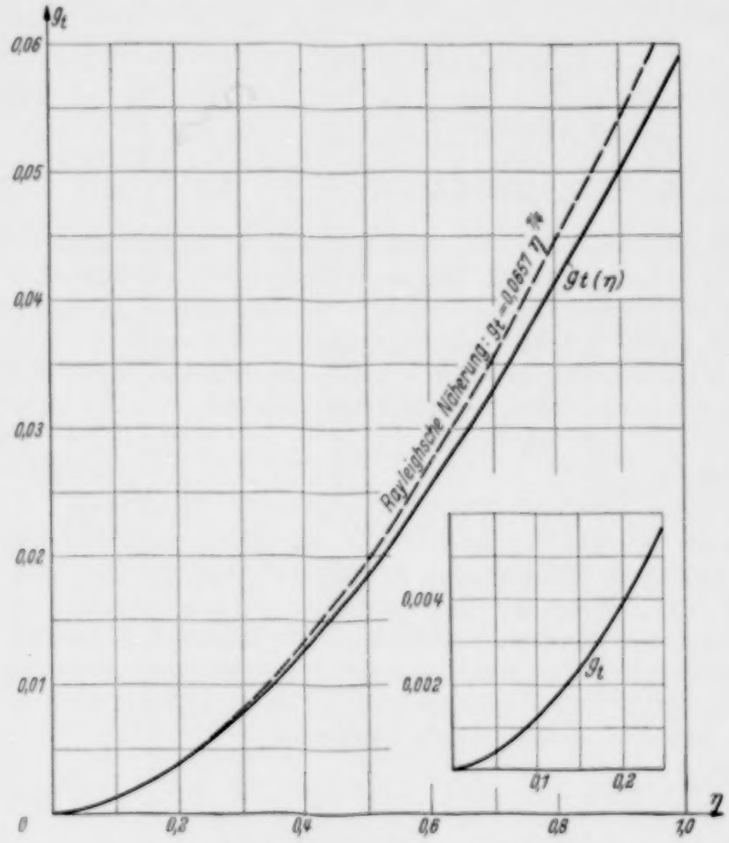


Abb. 6. Funktion $g_t(\eta)$ mit der Näherung (59).

Die Näherung (59) ist zusammen mit $g_t(\eta)$ in Abb. 6 aufgetragen. Im Gegensatz zur laminaren Strömung (Abb. 5) liegt die exakte Kurve hier unter der Näherung. Dies ist einzusehen, wenn man bedenkt, daß durch die endliche Wellengeschwindigkeit allein eine Verminderung der Grenzschichtdicke gegenüber den durch die Näherung gegebenen Werten zu erwarten ist, die hier wegen $f_t < f_l$ stärker sein muß als bei laminarer Strömung. Die Verdickung durch den Abfall von ϱ und ν mit wachsendem η reicht hier nicht aus, um $g_t(\eta)$ über die Näherungskurve zu heben, sondern beide Effekte kompensieren sich derart, daß im ganzen Bereich die Näherung (59) recht gut gilt. Diese Übereinstimmung ist aber, außer in der Umgebung von $\eta = 0$, rein zufälliger Art.

Der Anschluß der durch obige Formeln gegebenen turbulenten Grenzschicht an der Stelle $\eta = \eta_1$ an die Grenzschicht hinter der Welle kann auf entsprechende Weise wie bei der laminaren Grenzschicht hergestellt werden; die Grenzschicht hinter der Welle ist dabei durch (25) gegeben. Die Durchführung der Rechnung wird hier übergangen und nur das Ergebnis für U_1/V mitgeteilt:

$$\frac{U_1}{V} = \frac{0{,}225\left(\frac{U_1}{a_0}\right)^{3/4} - \left(\frac{\nu_0}{\nu_1}\right)^{1/4} g_t(\eta_{l1})}{\frac{7}{9}\left(\frac{\nu_0}{\nu_1}\right)^{1/4} g_t(\eta_{l1}) + 0{,}225\left(\frac{U_1}{a_0}\right)^{3/4}\frac{6\,(1-\eta_{l1})}{5\,\eta_{l1}}}\,. \tag{61}$$

Hiermit ist die turbulente Grenzschicht auch hinter der Expansionswelle bekannt.

7. Ausblick. Man kann nun noch überschläglich nachprüfen, wenigstens für laminare Strömung, ob die in Ziff. 2 gemachte Voraussetzung, das Verhältnis δ^*/ϑ sei konstant und die Wandschubspannung hänge nur von der Grenzschichtdicke ab, einigermaßen gültig ist. Bei einer genaueren Berechnung muß man diese Annahme sicher fallen lassen und mindestens einen Formparameter

einführen. Dieser Formparameter ist beim *Pohlhausen*verfahren[1] bekanntlich definiert als

$$\lambda = -\frac{1}{\varrho U}\frac{\partial p}{\partial x}\frac{\delta^2}{\nu} = \frac{\delta^2}{\nu}\left(\frac{1}{U}\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial U}{\partial x}\right). \tag{62}$$

Setzt man hier für δ die Lösung (42) ein, so erhält man für λ den Ausdruck

$$\lambda = \frac{(1-\eta/6)^6}{1-0{,}28\,\eta}\,\frac{g_*(\eta)}{\eta}. \tag{63}$$

Aus (63) folgt, daß λ im Bereich $0 \leq \eta \leq 1$ in den Grenzen $4{,}0 \geq \lambda \geq 2{,}7$ bleibt. Für solche Werte von λ weichen aber δ^*/ϑ sowie die Wandschubspannung noch nicht wesentlich von den Werten für $\lambda = 0$ (keine Druckänderung in Strömungsrichtung) ab, so daß es berechtigt erscheint, den Einfluß von λ in erster Näherung überhaupt zu vernachlässigen; dies entspricht dann der Annahme in Ziff. **2**.

Für höhere Genauigkeitsansprüche kann man die Näherungsformel (42) durch Iteration verbessern, indem man von vornherein mit dem *Pohlhausen*polynom in den Impulssatz eingeht, in erster Näherung aber $\lambda = 0$ setzt. Dann erhält man das Ergebnis (42) (mit etwas anderen Werten für $g_1(\eta)$, da unser Ansatz (7) nicht mit dem *Pohlhausen*polynom identisch ist). In nächster Näherung setzt man den nach (63) berechneten Parameter λ als bekannte Größe in den Impulssatz ein und bestimmt die Grenzschichtdicke von neuem. Eine Abschätzung hat ergeben, daß sich bei dieser Iteration die Grenzschichtdicke um nicht mehr als höchstens 10% gegenüber dem aus (42) folgenden Wert ändert. Auf die Durchführung der Iteration wurde daher der Einfachheit halber und in Anbetracht der ohnehin begrenzten Genauigkeit des Verfahrens verzichtet (z. B. bringt die Annahme $\varrho = \varrho_\infty$ für größere *Mach*zahlen Fehler von derselben Größenordnung).

Zum Schluß sei auf folgendes hingewiesen: Auf grundsätzlich ähnliche Art wie oben die von Anfang an laminare bzw. turbulente Grenzschicht berechnet wurde, kann man auch den Fall behandeln, daß die Grenzschicht anfangs laminar ist und erst in einiger Entfernung vom Wellenkopf in die turbulente Grenzschicht umschlägt. Die Anfangsbedingungen für die turbulente Grenzschicht sind hier etwas komplizierter und der Zusammenschluß von laminarer und turbulenter Grenzschicht ist nicht so einfach zu vollziehen wie etwa oben der Zusammenschluß gleichartiger Grenzschichten an der Grenze der beiden verschiedenen Wellengebiete. Durch Zurückgreifen auf die hier benutzte Charakteristikentheorie ließe sich aber auch dieses Problem in jedem einzelnen Falle lösen, worauf jedoch in dieser, zur ersten Orientierung über die zu erwartenden Effekte gedachten Arbeit verzichtet wird.

(Eingegangen am 24. Juli 1956)

Anschrift des Verfassers: Dr. *E. Becker*, Göttingen, Bunsenstr. 10.

[1] Vgl. *H. Schlichting*, a. a. O., Kap. XII, b.

Biegetheorie der Rotationsschale mit flacher, kreisförmiger Erzeugender

Von R. Windels

1. Einleitung. In den letzten Jahren ist eine große Anzahl von Veröffentlichungen über Schalen erschienen, und es ist heute möglich, für jede Schalenform die zur Ermittlung des Spannungs- und Verschiebungszustandes erforderlichen Ausgangsgleichungen ohne großen Rechenaufwand zu gewinnen. Es sei hier auf eine Übersicht von *Zerna*[1] verwiesen, der Hinweise auf das vorhandene Schrifttum gibt.

Die hauptsächlichen Schwierigkeiten der Schalentheorie treten bei der Lösung der Gleichungssysteme auf. Schon bei der geometrisch einfachsten Schalenform, der Kreiszylinderschale, sind sie nicht unerheblich, und die Ermittlung des Spannungsverlaufes erfordert langwierige Berechnungen. Bei doppelt gekrümmten Schalen ist es in den meisten Fällen schon für den Membranspannungszustand notwendig, ein Näherungsverfahren, wie zum Beispiel das Differenzenverfahren, anzuwenden.

Es scheint wünschenswert, für weitere Schalenformen Lösungsmethoden anzugeben. In dieser Arbeit wird der Versuch unternommen, das Spannungsbild für eine Rotationsschale mit flacher, kreisförmiger Erzeugender nach der Biegetheorie zu ermitteln.

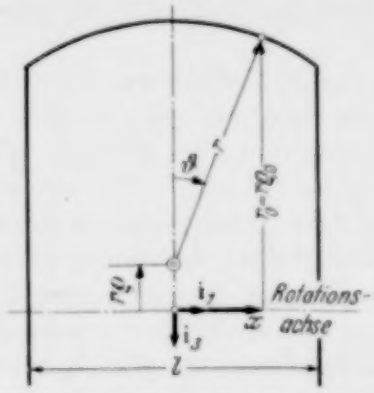


Abb. 1. Schnittebene mit Rotationsachse (Meridianschnitt).

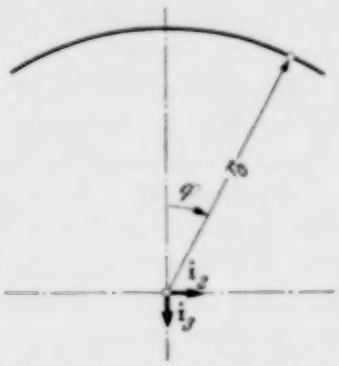


Abb. 2. Schnitt senkrecht zur Rotationsachse (Breitenkreisschnitt).

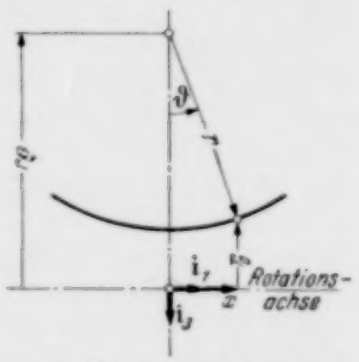


Abb. 3. Schale mit negativem Krümmungsmaß.

2. Schalenform und Bezeichnungen. Wenn die Einheitsvektoren $\mathfrak{i}_1, \mathfrak{i}_2, \mathfrak{i}_3$ ein kartesisches Rechtssystem aufspannen, kann der Ortsvektor der Mittelfläche einer Rotationsschale

$$\mathfrak{r} = r\,[\mathfrak{i}_1 \sin\vartheta + \varrho_0\,(\mathfrak{i}_2 \sin\varphi - \mathfrak{i}_3 \cos\varphi)] \tag{1}$$

geschrieben werden. Darin sind (siehe Abb. 1 und 2) ϑ und φ zwei Parameter, die ein Koordinatensystem auf der Schalenfläche bilden. Für ϑ = konst. erhält man die Schar der Breitenkreise, für φ = konst. die Schar der Meridiankurven. Der Abstand eines Punktes der Mittelfläche von der Rotationsachse beträgt

$$r_0 = r\,\varrho_0\,. \tag{2}$$

Für den hier betrachteten Sonderfall, bei dem die rotierende Kurve ein Kreis mit dem Halbmesser r ist, wird

$$\varrho_0 = \varrho \pm \cos\vartheta\,. \tag{3}$$

Der Mittelpunkt des rotierenden Kreises hat den Abstand $\varrho\,r$ von der Rotationsachse. Bei Schalen mit negativem Krümmungsmaß bleibt r eine positive Größe, die positive Richtung des Winkels ϑ ist dann aus Abb. 3 zu ersehen, und für ϱ_0 gilt, wie auch in allen folgenden Gleichungen, das untere Vorzeichen.

Die Schale wird durch zwei Binderscheiben ϑ = konst. und zwei Randglieder φ = konst. begrenzt. Die Untersuchung soll sich auf den Membranspannungszustand und seine Störungen durch die von den Randgliedern ausgehenden Biegespannungswellen beschränken. Wie die Berechnung der Kreiszylinderschale zeigt[2, 3], sind die Störungen des Membranspannungszustandes an den Bindern von untergeordneter Bedeutung.

[1] *W. Zerna*, Beton- und Stahlbetonbau 48 (1953) S. 88.
[2] *U. Finsterwalder*, Ing.-Arch. 4 (1933) S. 43.
[3] *F. Dischinger*, Beton und Eisen 34 (1935) S. 257.

Der Binderabstand wird mit l bezeichnet, und die Lage der Binder wird so gewählt, daß der Breitenkreis $\vartheta = 0$ von jedem Binder gleich weit entfernt ist. Als wesentliche Einschränkung wird vorausgesetzt, daß die Schale sich zwischen den Bindern nur wenig wölbt. Sie soll in der ϑ-Richtung als flach angesehen werden können, eine Forderung, die erfüllt wird, wenn die Binder nicht mehr als $\vartheta \approx \pm 0{,}3$ ($\approx 20°$) vom Koordinatenursprung entfernt sind.

Die Verschiebungen der Schalenmittelfläche in den Tangentenrichtungen des Meridians und des Breitenkreises werden mit u und v bezeichnet, die Verschiebung in Richtung der Schalennormalen mit w (positiv nach innen, vgl. Abb. 4a). Der Abstand eines Schalenpunktes von der Mittelfläche sei z (positiv nach außen).

Auf die Schale wirkt die Flächenlast p, deren Komponenten in Richtung der Meridiantangente p_x, in Richtung der Breitenkreistangente p_φ und in Richtung der Schalennormalen p_z (positiv nach innen) sind (vgl. Abb. 4b).

An einem Schalenelement greifen die in Abb. 4c, d dargestellten Längskräfte N_x, N_φ, die Schubkräfte $N_{x\varphi}$, $N_{\varphi x}$, die Biegemomente M_x, M_φ, die Drillungsmomente $M_{x\varphi}$, $M_{\varphi x}$ und die Querkräfte Q_x, Q_φ an.

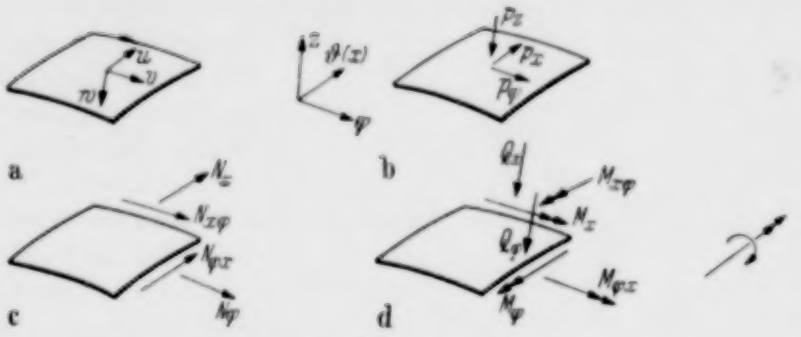


Abb. 4. Schalenelement.

Ableitungen nach ϑ werden durch einen Strich, Ableitungen nach φ durch einen Punkt angedeutet.

Die folgenden Betrachtungen sollen für eine anisotrope Schale gelten, für die *Dischinger*[1] die Dehnungssteifigkeiten D_x, $D_{x\varphi}$, D_φ sowie die Biegesteifigkeiten B_x, $B_{x\varphi}$, B_φ einführt. Es werden die Abkürzungen

$$\left.\begin{aligned} \delta_x &= \frac{D_x}{D_\varphi}, \qquad \delta_{x\varphi} = \frac{D_{x\varphi}}{D_\varphi}, \\ \beta_x &= \frac{B_x}{B_\varphi}, \qquad \beta_{x\varphi} = \frac{B_{x\varphi}}{B_\varphi} \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

benutzt. Für den Sonderfall der isotropen Schale mit der Schalenstärke t folgt

$$\left.\begin{aligned} D &= D_x = D_{x\varphi} = D_\varphi = \frac{E\,t}{1-\mu^2}, \\ B &= B_x = B_{x\varphi} = B_\varphi = \frac{E\,t^3}{12\,(1-\mu^2)}, \\ \delta_x &= \delta_{x\varphi} = 1, \\ \beta_x &= \beta_{x\varphi} = 1. \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

3. Gleichgewichtsbedingungen. Die Aufstellung der Gleichgewichtsbedingungen führt man zweckmäßigerweise auf eine in der Literatur angegebene Art durch, z. B. nach *Flügge*[2]. Dabei empfiehlt es sich, die folgenden reduzierten Schnittkräfte einzuführen:

$$\left.\begin{aligned} \bar N_x &= \varrho_0\, N_x, & \bar N_\varphi &= \frac{1}{\varrho_0}\, N_\varphi, \\ \bar M_x &= \varrho_0\, M_x, & \bar M_\varphi &= \frac{1}{\varrho_0}\, M_\varphi, \\ \bar Q_x &= r\,\varrho_0\, Q_x, & \bar Q_\varphi &= r\, Q_\varphi. \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Dann erhalten die Gleichgewichtsbedingungen folgende exakte Form:

$$\left.\begin{aligned} &\bar N_x' + \dot N_{\varphi x} \pm \varrho_0 \sin\vartheta\, \bar N_\varphi \mp \bar Q_x/r + r\,\varrho_0\, p_x = 0, \\ &N_{x\varphi}' + \bar N_\varphi^{\cdot} \mp \frac{1}{\varrho_0} \sin\vartheta\,(N_{x\varphi} + N_{\varphi x}) - \frac{\cos\vartheta}{r\,\varrho_0}\,\bar Q_\varphi + r\, p_\varphi = 0, \\ &\varrho_0 \cos\vartheta\, \bar N_\varphi \pm \bar N_x + \bar Q_\varphi^{\cdot}/r + \bar Q_x'/r + r\,\varrho_0\, p_z = 0, \end{aligned}\right\} \tag{7a}$$

[1] Siehe Fußnote 3 von S. 164.
[2] *W. Flügge*, Statik und Dynamik der Schalen, Berlin 1934.

$$\left.\begin{aligned} &\overline{M}_x' + M_{\varphi x}' \pm \varrho_0 \sin\vartheta\, \overline{M}_\varphi - \bar{Q}_x = 0\,, \\ &M_{x\varphi}' + \overline{M}_\varphi' \mp \frac{1}{\varrho_0} \sin\vartheta\, (M_{x\varphi} + M_{\varphi x}) - \bar{Q}_\varphi = 0\,, \\ &\pm M_{x\varphi} - \frac{1}{\varrho_0} \cos\vartheta\, M_{\varphi x} - r\,(N_{x\varphi} - N_{\varphi x}) = 0\,. \end{aligned}\right\} \tag{7b}$$

4. Elastizitätsgesetz. Das Elastizitätsgesetz kann ebenfalls auf einem in der Literatur gezeigten Weg gefunden werden. *Zerna*[1] gibt alle erforderlichen Gleichungen in der nach der klassischen Elastizitätstheorie exakten Art an. Es können jedoch, wie *Green* und *Zerna*[2] zeigen, weitere Vereinfachungen eingeführt werden, ohne daß die Genauigkeit der Berechnung dadurch geringer wird. Diese Vereinfachungen bestehen im wesentlichen darin, daß in konsequenter Weise diejenigen Glieder, die die Schalenstärke t als Faktor enthalten, gegenüber allen übrigen Gliedern in den Gleichungen vernachlässigt werden. In der erwähnten Arbeit wird die Vektor- und Tensorrechnung angewendet, wodurch eine große Allgemeingültigkeit erreicht wird; andererseits mögen dem mit dieser Schreibweise nicht vertrauten Leser Schwierigkeiten entstehen. Daher sollen im folgenden die erforderlichen Gleichungen in anschaulicher Weise hergeleitet werden, was bei dem hier betrachtetem speziellen Fall keine Umstände bereitet. Zunächst werden noch einmal die in der Schalentheorie üblichen Annahmen genannt:

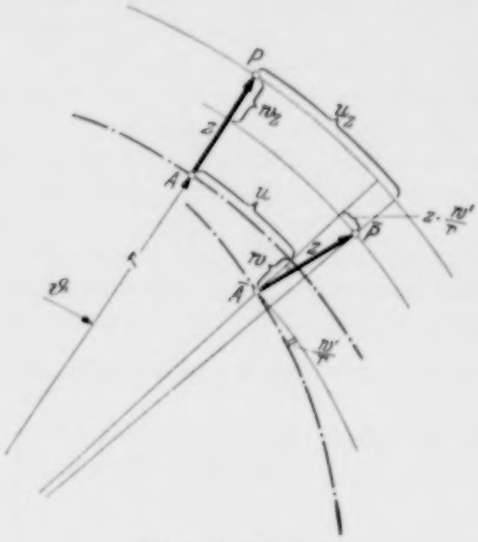


Abb. 5. Meridianschnitt.

1) Die Schalenstärke ist klein gegenüber allen anderen Abmessungen.

2) Die Verschiebungen sind klein gegenüber den Schalenabmessungen (außer der Schalenstärke), Größen höherer Ordnung können neben solchen erster Ordnung vernachlässigt werden.

3) Die Spannungen und Dehnungen in Richtung der Schalennormalen sind klein und werden vernachlässigt.

4) Die Schalennormalen bleiben auch Normalen der verformten Mittelfläche.

Es werden zwei Schalenschnitte betrachtet, ein Meridianschnitt mit dem Halbmesser r (Abb. 5) und ein Schnitt in Richtung der zweiten Hauptkrümmung mit dem Halbmesser $r_2 = r_0/\cos\vartheta$. Im Abstand z von einem Punkt A auf der Schalenmittelfläche liegt der Punkt P. Nach der Schalenverformung wird die Lage der beiden Punkte mit $\overline{A}$ und $\overline{P}$ bezeichnet. Die Verschiebungen des Punktes P seien u_z, v_z, w_z.

Aus dem Meridianschnitt (Abb. 5) folgt

$$u_z = u\frac{r+z}{r} + z\frac{w'}{r}\frac{r+z}{r+z-w} = u\left(1+\frac{z}{r}\right) + z\frac{w'}{r}\frac{1}{1-w/(r+z)}\,. \tag{8}$$

Werden entsprechend der ersten und zweiten Annahme die Größen z/r und $w/(r+z)$ gegen 1 vernachlässigt, so erhält man daraus

$$u_z = u + z\frac{w'}{r}\,, \tag{9}$$

und auf demselben Wege aus dem Schnitt in Richtung der zweiten Hauptkrümmung

$$v_z = v + z\frac{w^\cdot}{r_0}\,, \tag{10}$$

außerdem mit der dritten Annahme

$$w_z = w\,. \tag{11}$$

---

[1] *W. Zerna*, Ing.-Arch. 17 (1949) S. 149.

[2] *A. E. Green* u. *W. Zerna*, Quart. Journ. Mech. and Applied Math. 3 (1950) S. 9 und Theoretical Elasticity, Oxford 1954.

Die Dehnungen für einen Punkt P in Abstand z von der Mittelfläche werden

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon_{x,z} &= \frac{1}{r}(u_z' \mp w_z) = \varepsilon_x + z\frac{w^\circ}{r^2}, \\ \varepsilon_{\varphi,z} &= \frac{1}{r_0}(v_z^\cdot - w_z\cos\vartheta) = \varepsilon_\varphi + z\frac{w^{\cdot\cdot}}{r_0^2}, \\ \gamma_{x\varphi,z} &= \frac{1}{r_0}u_z^\cdot + \frac{1}{r}v_z' = \\ &= \gamma_{x\varphi} + z\left[\frac{w'^\cdot}{r\,r_0} + \frac{1}{r}\left(\frac{w^\cdot}{r_0}\right)'\right], \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

worin die Dehnungen der Mittelfläche

$$\varepsilon_x = \frac{1}{r}(u' \mp w), \qquad \varepsilon_\varphi = \frac{1}{r_0}(v^\cdot - w\cos\vartheta), \qquad \gamma_{x\varphi} = \frac{1}{r_0}u^\cdot + \frac{1}{r}v' \tag{13}$$

sind.

Das *Hooke*sche Gesetz läßt sich für den zweidimensionalen Spannungszustand σ_x, σ_φ, $\tau_{x\varphi} = \tau_{\varphi x} = \tau$ wie folgt schreiben:

$$\sigma_x = \frac{E}{1-\mu^2}(\varepsilon_{\varphi,z} + \mu\,\varepsilon_{x,z}), \quad \sigma_\varphi = \frac{E}{1-\mu^2}(\varepsilon_{\varphi,z} + \mu\,\varepsilon_{x,z}), \quad \tau = \frac{E}{1-\mu^2}\frac{1-\mu}{2}\gamma_{x\varphi,z}. \tag{14}$$

Durch Integration über die Schalenstärke erhält man die Schnittkräfte. Wird dabei für die Breite eines Schalenelementes entsprechend der ersten Annahme

$$\frac{r+z}{r} = 1 + \frac{z}{r} \approx 1 \tag{15}$$

gesetzt (ebenso für r_0), so ergibt sich mit Hilfe der Gleichungen (4), (5), (12), (14) das Elastizitätsgesetz in der Form

$$\left.\begin{aligned} N_x &= \int \sigma_x\,dz = D_x(\varepsilon_x + \mu\,\varepsilon_\varphi), \\ N_\varphi &= \int \sigma_\varphi\,dz = D_\varphi(\varepsilon_\varphi + \mu\,\varepsilon_x), \\ N_{x\varphi} &= N_{\varphi x} = \int \tau\,dz = D_{x\varphi}\frac{1-\mu}{2}\gamma_{x\varphi}, \\ M_x &= -\int \sigma_x\,z\,dz = -B_x\left(\frac{w^\circ}{r^2} + \mu\frac{w^{\cdot\cdot}}{r_0^2}\right), \\ M_\varphi &= -\int \sigma_\varphi\,z\,dz = -B_\varphi\left(\frac{w^{\cdot\cdot}}{r_0^2} + \mu\frac{w^\circ}{r^2}\right), \\ M_{x\varphi} &= M_{\varphi x} = -\int \tau\,z\,dz = -B_{x\varphi}\frac{1-\mu}{2}\left[\frac{w'^\cdot}{r\,r_0} + \frac{1}{r}\left(\frac{w^\cdot}{r_0}\right)'\right]. \end{aligned}\right\} \tag{16}$$

Die beiden ersten Gleichungen lauten nach ε_x, ε_φ aufgelöst:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{1-\mu^2}\left(\frac{N_x}{D_x} - \mu\frac{N_\varphi}{D_\varphi}\right), \qquad \varepsilon_\varphi = \frac{1}{1-\mu^2}\left(\frac{N_\varphi}{D_\varphi} - \mu\frac{N_x}{D_x}\right). \tag{17}$$

Damit sind alle erforderlichen Ausgangsgleichungen aufgestellt. Man erkennt, daß die eingeführten Näherungen eine paarweise Gleichheit der Schubkräfte $N_{x\varphi} = N_{\varphi x}$ und der Drillungsmomente $M_{x\varphi} = M_{\varphi x}$ bewirken.

5. Membranspannungszustand. Beim Membranspannungszustand werden in den Gleichgewichtsbedingungen (7) die Momente und Querkräfte vernachlässigt, und man erhält

$$\left.\begin{aligned} &\overline{N}_x' + N_{\varphi x}^\cdot \pm \varrho_0\sin\vartheta\,\overline{N}_\varphi + r\,\varrho_0\,p_x = 0, \\ &N_{x\varphi}' + \overline{N}_\varphi^\cdot \mp \frac{1}{\varrho_0}\sin\vartheta\,(N_{x\varphi} + N_{\varphi x}) + r\,p_\varphi = 0, \\ &\varrho_0\cos\vartheta\,\overline{N}_\varphi \pm \overline{N}_x + r\,\varrho_0\,p_z = 0. \end{aligned}\right\} \tag{18}$$

Aus der letzten Gleichgewichtsbedingung (7) folgt die Gleichheit der Schubkräfte $N_{x\varphi} = N_{\varphi x}$. Die Lösung dieses Gleichungsystem wird von *Rüdiger*[1] und *Zerna*[2] gezeigt, darum soll hier nicht näher darauf eingegangen werden.

[1] *D. Rüdiger*, Ing.-Arch. 22 (1954), S. 336.
[2] *W. Zerna*, Ing.-Arch. 17 (1949), S. 223.

Für eine Belastung infolge Eigengewicht

$$p_x = \pm\, p \cos\varphi \sin\vartheta\,, \qquad p_\varphi = p \sin\varphi, \qquad p_z = p \cos\varphi \cos\vartheta \tag{19}$$

ergeben sich die Schnittkräfte zu

$$\left.\begin{aligned} \bar{N}_x &= 2\,r\,p\,\frac{1}{\varrho_0 \cos\vartheta}\,\Phi\cos\varphi\,,\\ \bar{N}_\varphi &= -\,2\,r\,p\left[\frac{1}{2} \pm \frac{1}{\varrho_0^2\cos^2\vartheta}\,\Phi\right]\cos\varphi\,,\\ N_{x\varphi} &= -\,2\,r\,p\left[\frac{1}{\varrho_0\cos\vartheta}\,\Phi' \pm \frac{\operatorname{tg}\vartheta}{\varrho_0^2}\,\Phi\right]\sin\varphi\,. \end{aligned}\right\} \tag{20}$$

In diesen Gleichungen bedeuten

$$\left.\begin{aligned} \Phi &= \varrho\,(\vartheta\sin\vartheta + \cos\vartheta) \pm \frac{1}{2}\sin^2\vartheta + C_1\sin\vartheta + C_2\,,\\ \Phi' &= \cos\vartheta\,(\pm\sin\vartheta + \varrho\,\vartheta + C_1)\,. \end{aligned}\right\} \tag{21}$$

Von der Richtigkeit der Gleichungen (20) kann man sich durch Einsetzen in (18) überzeugen. Die beiden Integrationskonstanten C_1, C_2 lassen sich zur Erfüllung von zwei Randbedingungen benutzen. Sollen zum Beispiel an zwei Binderscheiben $r\sin\vartheta_0 = \pm\, l/2$ die Längskräfte N_x verschwinden, erhält man

$$C_1 = 0\,, \qquad C_2 = -\,\varrho\,(\vartheta_0\sin\vartheta_0 + \cos\vartheta_0) \mp \frac{1}{2}\sin^2\vartheta_0\,. \tag{22}$$

Der Biegespannungszustand erfordert die Entwicklung der Kräfte als *Fourier*-Reihen, daher sollen auch die Membrankräfte infolge einer als *Fourier*-Reihe dargestellten Eigengewichtsbelastung ermittelt werden. Die später erläuterten, für flache Schalen gültigen Näherungen

$$\sin\vartheta \approx 0\,, \qquad \cos\vartheta \approx 1\,, \qquad \varrho_0 \approx \bar{\varrho}_0 = \varrho \pm 1 \tag{23}$$

ermöglichen die Berechnung der Schnittkräfte aus den Gleichungen (18) für die Belastung (Eigengewicht):

$$p_x = 0\,, \qquad p_\varphi = p_n \sin\varphi\cos\vartheta_n\,, \qquad p_z = p_n\cos\varphi\cos\vartheta_n \tag{24}$$

mit

$$\vartheta_n = \frac{n\,\pi}{2\,\vartheta_0}\,\vartheta = \lambda\,\vartheta\,, \qquad \lambda = \frac{n\,\pi}{2\,\vartheta_0}, \qquad n = 1, 3, 5, \ldots, \tag{25}$$

worin ϑ_0 den Wert von ϑ an den Binderscheiben darstellt ($r\sin\vartheta_0 = \pm\, l/2$). Die Richtigkeit der nachfolgend angegebenen Schnittkräfte kann wieder durch Einsetzen in die Gleichungen (18) kontrolliert werden:

$$\left.\begin{aligned} \bar{N}_x &= -\,\frac{2\,r\,p_n}{\lambda^2 \pm 1/\bar{\varrho}_0}\cos\varphi\cos\vartheta_n\,,\\ \bar{N}_\varphi &= -\,r\,p_n\,\frac{\lambda^2 \mp 1/\bar{\varrho}_0}{\lambda^2 \pm 1/\bar{\varrho}_0}\cos\varphi\cos\vartheta_n\,,\\ N_{x\varphi} &= -\,\frac{2\,r\,p_n\,\lambda}{\lambda^2 \pm 1/\bar{\varrho}_0}\sin\varphi\sin\vartheta_n\,. \end{aligned}\right\} \tag{26}$$

Die Schalenverformungen infolge der Belastung (24) erhält man nach einigen Zwischenrechnungen aus den Gleichungen (6), (13), (17), (26), wobei die Näherungen (23) beibehalten werden:

$$\left.\begin{aligned} u &= \frac{r^2\,p_n\,\lambda}{D_\varphi\,(1-\mu^2)\,(\lambda^2 \pm 1/\bar{\varrho}_0)^2}\,[-\,2\,(1/\bar{\varrho}_0 \pm \mu)/\delta_x + \bar{\varrho}_0^2\,(\pm\,1 + \mu/\bar{\varrho}_0)\,(\lambda^2 \mp 1/\bar{\varrho}_0)\\ &\qquad \pm\, 4\,(1+\mu)/\delta_{x\varphi}]\cos\varphi\sin\vartheta_n\,,\\ v &= \frac{r^2\,p_n}{\bar{\varrho}_0\,D_\varphi\,(1-\mu^2)\,(\lambda^2 \pm 1/\bar{\varrho}_0)^2}\,[2\,(1/\bar{\varrho}_0 \pm \mu)/\delta_x - \bar{\varrho}_0^2\,(\pm\,1 + \mu/\bar{\varrho}_0)\,(\lambda^2 \mp 1/\bar{\varrho}_0)\\ &\qquad +\, 4\,\lambda^2\,\bar{\varrho}_0\,(1+\mu)/\delta_{x\varphi}]\sin\varphi\cos\vartheta_n\,,\\ w &= \frac{r^2\,p_n}{D_\varphi\,(1-\mu^2)\,(\lambda^2 \pm 1/\bar{\varrho}_0)^2}\,[2\,(1/\bar{\varrho}_0^2 - \mu\,\lambda^2)/\delta_x + \bar{\varrho}_0^2\,(\lambda^2 - \mu/\bar{\varrho}_0^2)\,(\lambda^2 \mp 1/\bar{\varrho}_0)\\ &\qquad +\, 4\,\lambda^2\,(1+\mu)/\delta_{x\varphi}]\cos\varphi\cos\vartheta_n\,. \end{aligned}\right\} \tag{27}$$

Der Normalenverschiebung w sind entsprechend den Gleichungen (16) Momente zugeordnet, die jedoch im allgemeinen so klein bleiben, daß sie in den Gleichgewichtsbedingungen vernachlässigt werden können. Dann bildet der Membranspannungszustand eine Partikularlösung des durch die Gleichungen (7), (16) gebildeten Systems von Differentialgleichungen.

6. Differentialgleichungen für den Biegespannungszustand. Der Membranspannungszustand erlaubt es in den meisten Fällen nicht, an den Schalenrändern die Verformungsbedingungen zwischen Schale und Randglied bzw. Binder zu erfüllen. Diese Aufgabe muß von dem Biegespannungszustand übernommen werden. Es sollen hier nur diejenigen Randstörungen untersucht werden, die von den Randgliedern $\varphi = \text{konst.}$ ausgehen. Die an den Bindern $\vartheta = \text{konst.}$ entstehenden Störungen sind von untergeordneter Bedeutung.

Die Ausgangsgleichungen für den Biegespannungszustand sind die Gleichgewichtsbedingungen (7), in denen die Belastungskomponenten p_x, p_φ, p_z entfallen, und das Elastizitätsgesetz (16). Wie schon erwähnt, sollen hier nur solche Schalen betrachtet werden, die in der ϑ-Richtung flach sind, bei denen der Halbmesser $\varrho_0 r$ sich also nur wenig verändert. Dann können die Näherungen (23) eingeführt werden. Die Näherungen $\sin\vartheta \approx 0$ und $\varrho_0 \approx \bar{\varrho}_0$ mögen sehr grob erscheinen. Es ist aber zu beachten, daß für $\vartheta = 0$ alle Gleichungen exakt bleiben, und das zu berechnende Spannungsbild interessiert im wesentlichen gerade für den Bereich in der Nähe von $\vartheta = 0$. Die mit Hilfe der Näherungen (23) ermittelten Schnittkräfte werden also in Schalenmitte ($\vartheta = 0$) nur geringfügig von denjenigen abweichen, die die Gleichungen (7), (16) für alle Werte ϑ exakt erfüllen.

Green und *Zerna*[1] zeigten, daß unter Beachtung der ersten Annahme (vgl. Abschnitt 4) in den beiden ersten Gleichgewichtsbedingungen (7) die Querkräfte vernachlässigt werden können. Diese Vereinfachung bedeutet keine gröbere Näherung als die zur Aufstellung des Elastizitätsgesetzes benutzten.

Die letzte Gleichgewichtsbedingung (7) steht im Widerspruch zu der sich aus dem Elastizitätsgesetz ergebenden Gleichheit der Schubkräfte und Drillungsmomente. Sie wird daher nicht beachtet.

Die Gleichgewichtsbedingungen (7) und das Elastizitätsgesetz (16) erhalten bei Berücksichtigung der genannten Näherungen und der Gleichungen (4), (6) folgende Form:

$$\bar{N}_x' + N_{\varphi x}^{\cdot} = 0\,, \qquad N_{x\varphi}' + \bar{N}_\varphi^{\cdot} = 0\,, \qquad \bar{\varrho}_0 \bar{N}_\varphi \pm \bar{N}_x + \frac{1}{r}(\bar{Q}_\varphi^{\cdot} + \bar{Q}_x') = 0\,, \tag{28}$$

$$\bar{Q}_x = \bar{M}_x' + M_{\varphi x}^{\cdot}\,, \qquad \bar{Q}_\varphi = M_{x\varphi}' + \bar{M}_\varphi^{\cdot}\,, \tag{29}$$

$$\bar{N}_x = D_\varphi \delta_x \bar{\varrho}_0 (\varepsilon_x + \mu\,\varepsilon_\varphi)\,, \qquad \bar{N}_\varphi = D_\varphi \frac{\varepsilon_\varphi + \mu\,\varepsilon_x}{\bar{\varrho}_0}\,, \qquad N_{x\varphi} = N_{\varphi x} = D_\varphi\,\delta_{x\varphi}\frac{1-\mu}{2}\gamma_{x\varphi}\,, \tag{30}$$

$$\left.\begin{aligned} \bar{M}_x &= -B_\varphi \beta_x (w'' + \mu\, w^{\cdot\cdot}/\bar{\varrho}_0^2)\frac{\bar{\varrho}_0}{r^2}\,,\\ \bar{M}_\varphi &= -B_\varphi \frac{w^{\cdot\cdot}/\bar{\varrho}_0^2 + \mu\, w''}{\bar{\varrho}_0 r^2}\,,\\ M_{x\varphi} = M_{\varphi x} &= -B_\varphi \beta_{x\varphi}\frac{1-\mu}{\bar{\varrho}_0 r^2} w^{\prime\cdot}\,. \end{aligned}\right\} \tag{31}$$

Die Längs- und Schubkräfte können durch eine Spannungsfunktion Φ so ersetzt werden, daß die ersten beiden Gleichungen (28) erfüllt sind:

$$\bar{N}_x = \bar{\varrho}_0 \Phi^{\cdot\cdot}\,, \qquad \bar{N}_\varphi = \bar{\varrho}_0 \Phi''\,, \qquad N_{x\varphi} = -\bar{\varrho}_0 \Phi^{\prime\cdot}\,. \tag{32}$$

Werden nun diese Werte in die dritte Gleichung (28) unter Beachtung von (29), (31) eingeführt, ergibt sich die Differentialgleichung

$$\beta_x \bar{\varrho}_0^4 w'''' + 2\beta\,\bar{\varrho}_0^2 w''^{\cdot\cdot} + w^{\cdot\cdot\cdot\cdot} - \frac{1}{B_\varphi}(\bar{\varrho}_0^2 \Phi'' \pm \bar{\varrho}_0 \Phi^{\cdot\cdot})\,\bar{\varrho}_0^3 r^3 = 0\,, \tag{33}$$

worin

$$\beta = \beta_{x\varphi} + \frac{\mu}{2}(1 + \beta_x - 2\beta_{x\varphi})\,. \tag{34}$$

Aus (13) folgt die Identität

$$\varepsilon_x^{\cdot\cdot} + \bar{\varrho}_0^2 \varepsilon_\varphi'' - \bar{\varrho}_0 \gamma_{x\varphi}^{\prime\cdot} + (\bar{\varrho}_0 w'' \pm w^{\cdot\cdot})\frac{1}{r} = 0\,, \tag{35}$$

---

[1] Siehe Fußnote 2 von S. 166.

und daraus mit (6), (16), (17), (32) eine zweite Differentialgleichung:

$$\delta_x \bar{\varrho}_0^4 \Phi'''' + 2\,\delta \bar{\varrho}_0^2 \Phi'''' + \Phi'''' + (\bar{\varrho}_0^2 w'' \pm \bar{\varrho}_0 w'')\,(1-\mu^2)\frac{D_x}{\bar{\varrho}_0 r} = 0\,, \tag{36}$$

worin

$$\delta = \frac{\delta_x}{\delta_{x\varphi}} + \frac{\mu}{2}\left(2\,\frac{\delta_x}{\delta_{x\varphi}} - 1 - \delta_x\right) \tag{37}$$

ist.

Die beiden Gleichungen (33), (36) bilden ein System homogener partieller Differentialgleichungen vierter Ordnung. Die gesuchten Funktionen sind w und Φ, aus denen die Schnittkräfte nach (6), (29), (31), (32) ermittelt werden können. Die Verschiebungen ergeben sich aus (13), (16), (17).

7. Lösung der Differentialgleichungen. Durch den Ansatz

$$\left.\begin{aligned} w &= \overline{W}_r\, e^{m\varphi} \cos \vartheta_n\,, \\ \Phi &= \overline{F}_r\, e^{m\varphi} \cos \vartheta_n \end{aligned}\right\} \quad (r = 1, 2, \ldots . 8) \tag{38}$$

folgt aus den Differentialgleichungen (33), (36) das homogene Gleichungssystem

$$\left.\begin{aligned} (\beta_x - 2\,\beta\,\overline{m}^2 + \overline{m}^4)\,\overline{W}_r + (1 \mp \bar{\varrho}_0\,\overline{m}^2)\,\frac{\bar{\varrho}_0\, r^3}{\lambda^2\, B_\varphi}\,\overline{F}_r = 0\,, \\ (\delta_x - 2\,\delta\,\overline{m}^2 + \overline{m}^4)\,\overline{F}_r - (1 \mp \bar{\varrho}_0\,\overline{m}^2)\,(1-\mu^2)\,\frac{D_x}{r\,\lambda^2\,\bar{\varrho}_0^3}\,\overline{W}_r = 0 \end{aligned}\right\} \tag{39}$$

mit der Abkürzung

$$\overline{m} = \frac{m}{\bar{\varrho}_0\,\lambda}\,, \tag{40}$$

für das nur dann eine nicht triviale Lösung existiert, wenn die Nennerdeterminante verschwindet, wenn also

$$(\beta_x - 2\,\beta\,\overline{m}^2 + \overline{m}^4)\,(\delta_x - 2\,\delta\,\overline{m}^2 + \overline{m}^4) + \varepsilon^8\,(1 \mp \bar{\varrho}_0\,\overline{m}^2)^2 = 0 \tag{41}$$

wird, worin

$$\varepsilon = \sqrt[8]{\frac{r^2\, D_x (1-\mu^2)}{\bar{\varrho}_0^3\,\lambda^4\, B_\varphi}} \tag{42}$$

bedeutet. Gleichung (41) ist von achter Ordnung in $\overline{m}$ und besitzt als Lösungen die acht Wurzeln

$$\left.\begin{aligned} \overline{m}_1 &= -\overline{m}_5 = -\bar{\varkappa}_1 + i\,\bar{\nu}_1\,, \\ \overline{m}_2 &= -\overline{m}_6 = -\bar{\varkappa}_1 - i\,\bar{\nu}_1\,, \\ \overline{m}_3 &= -\overline{m}_7 = -\bar{\varkappa}_2 + i\,\bar{\nu}_2\,, \\ \overline{m}_4 &= -\overline{m}_8 = -\bar{\varkappa}_2 - i\,\bar{\nu}_2 \end{aligned}\right\} \tag{43}$$

mit den reellen Konstanten

$$\bar{\varkappa} = \frac{\varkappa}{\bar{\varrho}_0\,\lambda}\,, \qquad \bar{\nu} = \frac{\nu}{\bar{\varrho}_0\,\lambda}\,. \tag{44}$$

Die Wurzeln sind paarweise konjugiert komplex und paarweise entgegengesetzt gleich. Ihre Bestimmung ist für den allgemeinen Fall der anisotropen Schale recht umständlich, kann aber für die später behandelten Sonderfälle wesentlich vereinfacht werden.

Aus den Gleichungen (39) leitet sich für die komplexen Konstanten $\overline{W}_r$, $\overline{F}_r$ die Beziehung

$$\overline{W}_r = -\frac{\bar{\varrho}_0\, r^3}{\lambda^2\, B_\varphi}\,\frac{1 \mp \bar{\varrho}_0\,\overline{m}^2}{\beta_x - 2\,\beta\,\overline{m}^2 + \overline{m}^4}\,\overline{F}_r\,, \qquad \overline{W}_r = +\frac{r\,\lambda^2\,\bar{\varrho}_0^3}{D_x\,(1-\mu^2)}\,\frac{\delta_x - 2\,\delta\,\overline{m}^2 + \overline{m}^4}{1 \mp \bar{\varrho}_0\,\overline{m}^2}\,\overline{F}_r \tag{45}$$

ab, die nach Multiplikation beider Gleichungen miteinander folgende Form erhält:

$$\overline{W}_r = i\,K \sqrt{\frac{\delta_x - 2\,\delta\overline{m}^2 + \overline{m}^4}{\beta_x - 2\,\beta\,\overline{m}^2 + \overline{m}^4}}\;\overline{F}_r = K\,(\chi + i\,\psi)\,\overline{F}_r \tag{46}$$

mit

$$K = \frac{r^2\,\bar{\varrho}_0^3}{\sqrt{B_\varphi\, D_x\,(1-\mu^2)}}\,. \tag{47}$$

Die reellen Konstanten χ, ψ lassen sich aus den Gleichungen (45) bzw. (46) für jeden Wert $\bar{m}$ berechnen:

$$\left.\begin{aligned} \chi + i\,\psi &= -\varepsilon^4 \frac{1 \mp \bar{\varrho}_0 \bar{m}^2}{\beta_x - 2\,\beta\,\bar{m}^2 + \bar{m}^4}, \\ \chi + i\,\psi &= +\frac{1}{\varepsilon^4} \frac{\delta_x - 2\,\delta \bar{m}^2 + \bar{m}^4}{1 \mp \bar{\varrho}_0 m^2}, \\ \chi + i\,\psi &= i \sqrt{\frac{\delta_x - 2\,\delta \bar{m}^2 + \bar{m}^4}{\beta_x - 2\,\beta\,\bar{m}^2 + \bar{m}^4}}\,. \end{aligned}\right\} \tag{48}$$

Darin bedeutet in Übereinstimmung mit Gleichung (42)

$$\varepsilon^4 = \frac{r}{\bar{\varrho}_0 \lambda^2} \sqrt{\frac{D_x}{B_\varphi}(1 - \mu^2)}\,. \tag{49}$$

Mit den Wurzeln (43) folgt für χ, ψ aus (45)

$$\left.\begin{aligned} \bar{m}_1, \bar{m}_5 &: -\chi_1, -\psi_1\,, \\ \bar{m}_2, \bar{m}_6 &: -\chi_1, +\psi_1\,, \\ \bar{m}_3, \bar{m}_7 &: +\chi_2, +\psi_2\,, \\ \bar{m}_4, \bar{m}_8 &: +\chi_2, -\psi_2\,. \end{aligned}\right\} \tag{50}$$

Für die praktische Berechnung wird von den komplexen Konstanten $\bar{W}_r$, $\bar{F}_r$ auf reelle Konstante W_r, F_r übergegangen. Bei allen folgenden Schritten soll dabei eine Beschränkung auf die ersten vier Wurzeln (43) vorgenommen werden, die für die Berechnung einer Randstörung ausreichen. Zur Beseitigung der Störung an einem zweiten Rand stehen die übrigen Wurzeln zur Verfügung, für die alle folgenden Rechenoperationen ebenfalls durchgeführt werden müssen.

Nach Einführung der neuen Konstanten

$$\left.\begin{aligned} W_1 &= (\bar{W}_1 + \bar{W}_2)\,, & F_1 &= (\bar{F}_1 + \bar{F}_2)\,, \\ W_2 &= i\,(\bar{W}_1 - \bar{W}_2)\,, & F_2 &= i\,(\bar{F}_1 - \bar{F}_2)\,, \\ W_3 &= (\bar{W}_3 + \bar{W}_4)\,, & F_3 &= (\bar{F}_3 + \bar{F}_4)\,, \\ W_4 &= i\,(\bar{W}_3 - \bar{W}_4)\,, & F_4 &= i\,(\bar{F}_3 - \bar{F}_4) \end{aligned}\right\} \tag{51}$$

lassen sich die Gleichungen (38) in der Form

$$\left.\begin{aligned} w &= \left[e^{-\varkappa_1 \varphi}\,(W_1 \cos \nu_1 \varphi + W_2 \sin \nu_1 \varphi) \right. \\ &\quad \left. + e^{-\varkappa_2 \varphi}\,(W_3 \cos \nu_2 \varphi + W_4 \sin \nu_2 \varphi)\right] \cos \vartheta_n\,, \\ \Phi &= \left[e^{-\varkappa_1 \varphi}\,(F_1 \cos \nu_1 \varphi + F_2 \sin \nu_1 \varphi) \right. \\ &\quad \left. + e^{-\varkappa_2 \varphi}\,(F_3 \cos \nu_2 \varphi + F_4 \sin \nu_2 \varphi)\right] \cos \vartheta_n \end{aligned}\right\} \tag{52}$$

schreiben, worin von den acht Konstanten W_r, F_r nur vier frei wählbar sind. Die übrigen lassen sich mit Hilfe der aus den Gleichungen (46), (50), (51) abgeleiteten Beziehungen berechnen:

$$\left.\begin{aligned} W_1 &= (\bar{W}_1 + \bar{W}_2) = -K\left[(\bar{F}_1 + \bar{F}_2)\,\chi_1 + i\,(\bar{F}_1 - \bar{F}_2)\,\psi_1\right] \\ &= -K\,(\chi_1 F_1 + \psi_1 F_2)\,, \\ W_2 &= -K\,(\chi_1 F_2 - \psi_1 F_1)\,, \\ W_3 &= K\,(\chi_2 F_3 + \psi_2 F_4)\,, \\ W_4 &= K\,(\chi_2 F_4 - \psi_2 F_3)\,. \end{aligned}\right\} \tag{53}$$

Jetzt können alle Schnittgrößen angegeben werden. Die Schnittkräfte erhält man mit den Gleichungen (6), (29), (31), (32) aus den Funktionen w, Φ (38) und die Verschiebungen ergeben sich aus den Gleichungen (13), (17) zu

$$\left.\begin{aligned} u &= \int \left[\frac{r}{B_\varphi (1 - \mu^2)} \frac{q'''}{c_x} - \mu\,\bar{\varrho}_0^2 \Phi''\right) \pm w'\Big]\, d\vartheta\,, \\ v &= -\frac{\bar{\varrho}_0 r}{D_\varphi (1 - \mu)} \left(\frac{2}{\delta_{x\varphi}} - \frac{\mu}{1 + \mu}\right) \Phi' - \frac{1}{\bar{\varrho}_0} \int\int \left(\frac{r}{D_x (1 - \mu^2)} \Phi''' \pm w'\right) d\vartheta\, d\vartheta\,. \end{aligned}\right\} \tag{54}$$

8. Die isotrope Schale. Für den Sonderfall der isotropen Schale werden entsprechend den Gleichungen (5), (34), (37)

$$\delta_x = \delta = 1,\ \beta_x = \beta = 1,\ D_x = D, \qquad B_\varphi = B\,.$$

Dann kann aber Gleichung (41) in der Form

$$(1 - \bar{m}^2)^4 + \varepsilon^8 (1 \mp \bar{\varrho}_0\, \bar{m}^2)^2 = 0 \tag{55}$$

geschrieben werden. Daraus erhält man mit den Hilfsgrößen

$$\underset{(2)}{\varepsilon_1} = \frac{\varepsilon^2}{\sqrt{2}} \sqrt{\sqrt{\frac{1}{16}\varepsilon^8 \bar{\varrho}_0^4 + \left(1 \mp \frac{1}{2}\bar{\varrho}_0\right)^2} \underset{(+)}{-} \frac{1}{4}\varepsilon^4 \bar{\varrho}_0^2} \tag{56}$$

die Werte

$$\left.\begin{aligned} \underset{(2)}{\bar{\varkappa}_1} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\sqrt{(1 \underset{(-)}{+} \varepsilon_1)^2 + \left(\pm \frac{1}{2}\varepsilon^4 \bar{\varrho}_0 \underset{(+)}{-} \varepsilon_2\right)^2} + 1 \underset{(-)}{+} \varepsilon_1}\ , \\ \underset{(2)}{\bar{\nu}_1} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\sqrt{(1 \underset{(-)}{+} \varepsilon_1)^2 + \left(\pm \frac{1}{2}\varepsilon^4 \bar{\varrho}_0 \underset{(+)}{-} \varepsilon_2\right)^2} - 1 \underset{(+)}{-} \varepsilon_1}\ . \end{aligned}\right\} \tag{57}$$

Außerdem folgt aus den Gleichungen (48)

$$\underset{(2)}{\chi_1} = 0\,, \qquad \underset{(2)}{\psi_1} = +1\,, \tag{58}$$

so daß die Gleichungen (53) weitgehend vereinfacht werden.

Der Wert ε der Gleichung (42) nimmt die Form

$$\varepsilon = \sqrt[4]{\frac{r\sqrt{12\,(1-\mu^2)}}{\bar{\varrho}_0 \lambda^2 t}} \tag{59}$$

an und liegt bei Stahlbetonschalen im allgemeinen zwischen $\varepsilon = 1{,}5$ für kurze Schalen und $\varepsilon = 6{,}0$ für lange Schalen.

9. Die in φ-Richtung durch Rippen verstärkte Schale. Sehr häufig müssen bei weitgespannten Schalen in der φ-Richtung Verstärkungsrippen angeordnet werden, um die auftretenden Biegemomente aufnehmen zu können oder um die Knicksicherheit der Schale zu vergrößern. Schon *Dischinger*[1] bemerkt, daß bei einem nicht zu großem Rippenabstand das Tragwerk als eine anisotrope Schale aufgefaßt werden kann, die sich durch eine große Biegesteifigkeit B_φ auszeichnet. Die Biegesteifigkeiten B_x, $B_{x\varphi}$ bleiben im Verhältnis so klein, daß sie gegenüber B_φ vernachlässigt werden können. Die Dehnungssteifigkeit D_φ vergrößert sich durch die Anordnung von Rippen nur geringfügig und näherungsweise wird daher $D_x = D_\varphi = D_{x\varphi}$ gesetzt.

Mit diesen Näherungen können nach (34), (37) $\beta = 0$, $\delta = 1$ gesetzt werden, so daß aus Gleichung (41) die Gleichung

$$\bar{m}^4 (1 - \bar{m}^2)^2 + \varepsilon^8 (1 \mp \bar{\varrho}_0\, \bar{m}^2)^2 = 0 \tag{60}$$

folgt, deren Lösung mit den Hilfsgrößen

$$\underset{(4)}{\varepsilon_3} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\sqrt{\frac{1}{16}(1 - \varepsilon^8 \bar{\varrho}_0^2)^2 + \varepsilon^8 \left(1 \mp \frac{1}{2}\bar{\varrho}_0\right)^2} \underset{(-)}{+} \frac{1}{4}(1 - \varepsilon^8 \bar{\varrho}_0^2)} \tag{61}$$

die Werte

$$\left.\begin{aligned} \underset{(2)}{\bar{\varkappa}_1} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\sqrt{\left(\frac{1}{2} \underset{(-)}{+} \varepsilon_3\right)^2 + \left(\pm \frac{1}{2}\varepsilon^4 \bar{\varrho}_0 \underset{(+)}{-} \varepsilon_4\right)^2} + \left(\frac{1}{2} \underset{(-)}{+} \varepsilon_3\right)}\ , \\ \underset{(2)}{\bar{\nu}_1} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\sqrt{\left(\frac{1}{2} \underset{(-)}{+} \varepsilon_3\right)^2 + \left(\pm \frac{1}{2}\varepsilon^4 \bar{\varrho}_0 \underset{(+)}{-} \varepsilon_4\right)^2} - \left(\frac{1}{2} \underset{(-)}{+} \varepsilon_3\right)}\ . \end{aligned}\right\} \tag{62}$$

ergibt.

10. Die Kreiszylinderschale. Alle bisher gebrachten Gleichungen bleiben nach dem Grenzübergang $\bar{\varrho}_0 \to 0$ bzw. $r\bar{\varrho}_0 \to r_0$ für die Kreiszylinderschale gültig. Bei Isotropie ergibt sich dabei die von *Zerna*[2] gefundene Form.

---

[1] Siehe Fußnote 3 von S. 164.

[2] *W. Zerna*, Ing.-Arch. 20 (1952), S. 357.

11. Zusammenfassung. Bei der Auflösung der Gleichungssysteme von doppelt gekrümmten Schalen treten im allgemeinen so große mathematische Schwierigkeiten auf, daß eine Berechnung der Schnittkräfte nicht möglich ist. In der vorliegenden Arbeit wird gezeigt, daß bei Einführung einiger Näherungen der Spannungszustand einer Rotationsschale mit flacher, kreisförmiger Erzeugender ermittelt werden kann. Sowohl bei der Aufstellung der Gleichgewichtsbedingungen als auch beim Elastizitätsgesetz werden in allen Gleichungen diejenigen Glieder, die die Schalenstärke enthalten, vernachlässigt, soweit sie neben anderen Gliedern vorkommen. Diese Näherung ist nicht gröber als die schon seit jeher bei Schalenberechnungen eingeführten Vereinfachungen des Elastizitätsgesetzes. Bei flachen Schalen können in den Gleichungen weitere Glieder vernachlässigt werden, und es gelingt, das Problem auf zwei homogene partielle Differentialgleichungen vierter Ordnung mit konstanten Koeffizienten für eine Spannungsfunktion Φ und die Normalenverschiebung w zurückzuführen. Die charakteristische Gleichung wird für eine beliebige anisotrope Schale angegeben. Für die Sonderfälle der isotropen Schale und der in der Rotationsrichtung durch Rippen verstärkten Schale können die Wurzeln der charakteristischen Gleichung als einfache Ausdrücke geschrieben werden. Die Schnittkräfte und Verschiebungen der Schale werden aus einer Spannungsfunktion und der Normalenverschiebung berechnet.

(Eingegangen am 28. Juli 1956)

Anschrift des Verfassers: Dr.-Ing. *R. Windels*, Hamburg 39, Krohnskamp 74.

Die Matrizentheorie der Statik

Von J. H. Argyris

1. Einleitung. Die folgende Arbeit[1] bringt einen Überblick und eine beträchtliche Erweiterung der Matrizentheorie der Statik der elastischen Tragwerke, die vom Verfasser in einer früheren Abhandlung[2] entwickelt worden ist.

Wir sind uns schon seit einigen Jahren bewußt, daß keine der gewöhnlichen statischen Methoden wirklich geeignet ist, die Spannungsverteilung und die Nachgiebigkeitsmatrizen der hochgradig statisch unbestimmten Systeme der modernen Luftfahrtkonstruktionen zu bestimmen. Ähnliche Schwierigkeiten treten auch in anderen Anwendungsgebieten der Statik auf. Die Iterationsverfahren können in gewissen Fällen nützlich sein, sind aber im allgemeinen zu langwierig und haben sich nicht bei den membran- und schalenförmigen Tragwerken der Luftfahrt bewährt.

Diese Schwierigkeiten können wir mit der Matrizenformulierung der Statik in Verbindung mit dem elektronischen Digitalautomaten überwinden. Die Matrizenformulierung erlaubt es nicht nur, die Rechnungen viel übersichtlicher zu gestalten, sondern ist auch die ideale Schreibweise für den Digitalautomaten[3]. Außerdem sind die theoretischen Ableitungen der Matrizentheorie so durchsichtig und elegant, daß neue und praktisch wertvolle Beziehungen, die in der gewöhnlichen Schreibweise unmöglich oder nur schwierig erkennbar wären, sich jetzt sehr einfach ergeben.

Die Theorie wird hier zugleich für das Kraft- und Deformationsverfahren entwickelt. Es zeigt sich, daß die beiden Methoden dual sind: jede Beziehung in dem einen Verfahren hat eine entsprechende Beziehung in dem anderen Verfahren, die sich durch eine einfache „Übersetzung" ergibt. Wir verweisen auch auf die frühere Arbeit[2], wo die Vor- und Nachteile der beiden Methoden eingehend behandelt sind. Für kontinuierliche Tragwerke wie Flugzeugschalen ist das Kraftverfahren im allgemeinen vorzuziehen.

Im Abschnitt **2** werden die Einheitslast- und Einheitsverschiebungsgesetze, die eine besonders elegante Ableitung des Kraft- und Deformationsverfahrens ermöglichen, wiedergegeben. Wir beschränken uns hier auf kleine Verschiebungen und Verzerrungen, für die die gewöhnlichen Gleichgewichtsbedingungen und Verzerrungsausdrücke gelten. Andererseits kann das Elastizitätsgesetz nichtlinear sein. Für Tragwerke nehmen die Einheitsgesetze eine besonders einfache Form ein.

Der Abschnitt **3** bringt eine erweiterte Formulierung des Einheitslast- und Einheitsverschiebungsgesetzes für den speziellen Fall von linearelastischen Systemen. Anschließend wird die Nachgiebigkeit und Steifigkeit eines Tragwerkes eingehend behandelt. Die eigentliche statische Berechnung von Systemen nach dem Kraft- und Deformationsverfahren wird danach im Abschnitt **4** entwickelt. Alle Belastungsarten sowie Temperatureinflüsse sind berücksichtigt. Es zeigt sich, daß wir die Nachgiebigkeit (oder Steifigkeit) des Tragwerks äußerst einfach als Endergebnis der Spannungsermittlung erhalten können. Damit haben wir alle elastischen Unterlagen um auch die dynamischen Berechnungen und insbesondere die Eigenschwingungsuntersuchungen durchzuführen. Auf alle Fälle ist es unnötig, die Nachgiebigkeit oder Steifigkeit getrennt von der statischen Berechnung zu bestimmen. Mit den hier gegebenen Methoden ist es möglich, in der Praxis die Untersuchungen von komplizierten Systemen wie Flugzeugflügeln[2,3] und Rümpfen systematisch für alle statischen und dynamischen Fälle durchzuführen. Selbstverständlich ist auch die Behandlung von Balken- und Rahmenproblemen auch bei Berücksichtigung der Schubverformung ein einfaches Problem. Es ist beachtenswert, daß wir in allen statischen Berechnungen nur drei prinzipiell einfache Matrizen und eine Spaltenmatrix der Lasten benötigen.

Die allgemeine Theorie von Abschnitt **4** kann auf jedes Tragwerk, also auch auf eines mit Ausschnitten angewandt werden. Die praktische Berechnung derartiger Systeme wird aber doch im allgemeinen komplizierter und weniger übersichtlich als für das entsprechende Tragwerk ohne Ausschnitte. Dieses vermeidet eine besondere Methode (Abschnitt **5**), die schon in der vorerwähnten Arbeit[2] erschien, und die es ermöglicht, die Spannungsverteilung des Tragwerks mit Ausschnitten

[1] Erweiterte Fassung des Vortrages des Verfassers an der 1956 Pfingsttagung der Gesellschaft für angewandte Mathematik und Mechanik in Stuttgart.

[2] *J. H. Argyris*, Aircraft Engineering, 26 (1954) S. 347, 383 und 27 (1955) S. 42, 80, 125, 145. Siehe auch *J. H. Argyris* u. *S. Kelsey*, Wissenschaftliche Gesellschaft für Luftfahrt, Jahrbuch 1956.

[3] *P. M. Hunt*, Aircraft Engineering, 28 (1956) S. 70, 111, 155.

von der statischen Berechnung des kontinuierlichen Systems abzuleiten. Das Verfahren ist verblüffend einfach und eignet sich auch für Fachwerke und Rahmen, deren regulärer Aufbau nur durch einige fehlende Glieder gestört ist.

In der Praxis kommt es immer wieder vor, daß einzelne Teile eines Tragwerks nach der Vollendung der statischen Berechnung modifiziert werden. Um eine Wiederholung der ganzen elastischen Untersuchung zu vermeiden, wird im Abschnitt **6** eine Methode hergeleitet, um die Spannungsverteilung des modifizierten Systems aus der des ursprünglichen Systems zu ermitteln. Dieses neue Verfahren ist eine Verallgemeinerung der Methode von Abschnitt **5** und in den meisten Fällen viel kürzer als die direkte Berechnung des modifizierten Tragwerks.

Arbeiten über die Matrizentheorie der Statik insbesondere der Kraftmethode sind schon früher[1] veröffentlicht worden. Es scheint aber, daß keine dieser Abhandlungen so allgemein und doch so einfach wie die vorliegende Theorie ist.

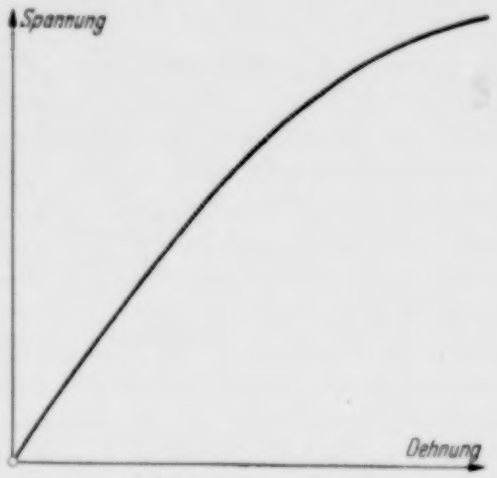


Abb. 1. Nichtlineares Elastizitätsgesetz.

2. Allgemeine Grundlagen. a) Einführung. Wir behandeln in diesem Abschnitt die Grundgesetze der Matrizentheorie der Statik. Wie erwähnt, beschränken wir uns auf den Fall kleiner Verschiebungen und Verzerrungen. Das Elastizitätsgesetz kann aber nichtlinear sein, so lange es eindeutig ist (Abb. 1). Um die Dualität des Kraft- und Deformationsverfahrens besonders klar hervorzuheben, führen wir die Gesetze und deren Ableitungen in zwei entsprechenden Spalten, und zwar links immer das Kraftverfahren, auf jeder Seite vor. Das zu jeder Beziehung duale Gesetz läßt sich unter Benutzung folgenden „Wörterbuches" leicht ableiten.

Kraftverfahren	Deformationsverfahren
Kraft (Spannung)	Verschiebung (Verzerrung)
Verschiebung (Verzerrung)	Kraft (Spannung)
$\text{Nachgiebigkeit} = \frac{\text{Verschiebung}}{\text{Kraft}}$	$\text{Steifigkeit} = \frac{\text{Kraft}}{\text{Verschiebung}}$

Die Dualität von Nachgiebigkeit und Steifigkeit wird schon von *C. B. Biezeno* und *R. Grammel*[2] eingehend behandelt.

Der Begriff der Kraft ist hier allgemein gefaßt. Damit kann er sich auf eine Kraftgruppe oder ein Moment beziehen. Ähnlich sind eine Verschiebungsgruppe oder Verdrehung auch in der Bezeichnung Verschiebung enthalten.

In einem Kontinuum sind die Spannungen und Verzerrungen eines Elementes $dx\,dy\,dz$ als Spaltenmatrizen

$$\boldsymbol{\sigma} = \{\sigma_{xx}\,\sigma_{yy}\,\sigma_{zz}\,\sigma_{xy}\,\sigma_{yz}\,\sigma_{zx}\} \quad \text{und} \quad \boldsymbol{\epsilon} = \{\varepsilon_{xx}\,\varepsilon_{yy}\,\varepsilon_{zz}\,\varepsilon_{xy}\,\varepsilon_{yz}\,\varepsilon_{zx}\} \tag{1}$$

geschrieben. Man beachte, daß $\{\cdots\cdots\}$ immer eine Spaltenmatrix bedeutet. Die allgemeine Bezeichnung von Matrizen erfolgt mit eckigen Klammern $[\cdots\cdots]$.

In den folgenden Untersuchungen, die sich auf Tragwerke beziehen, sind die Begriffe Spannung bzw. Verzerrung allgemein zu verstehen und schließen auch innere Kräfte, Momente usw. bzw. Längenänderungen, Drehungen usw. ein. Die Bezeichnung der Spannungen und Verzerrungen in Tragwerken erfolgt mit S, v.

b) Die Einheitsgesetze

Das Einheitslastgesetz

Wir bezeichnen mit

$\boldsymbol{\epsilon}$ den Verzerrungszustand und mit r eine assoziierte Verschiebung eines Körpers infolge gegebener Lasten, Temperaturdehnungen oder irgendwelcher eingeprägter Verzerrungen, wie sie

Das Einheitsverschiebungsgesetz

Wir bezeichnen mit

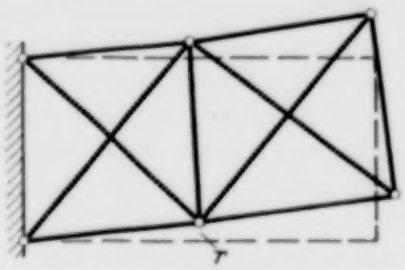
$\boldsymbol{\sigma}$ den Spannungszustand und mit R eine assoziierte Kraft in einem Körper infolge gegebener Verschiebungen, Temperaturspannungen oder irgendwelcher eingeprägter Zwangsspannungen,

[1] *B. Langefors*, Aeronautical Sciences, 19 (1952), S. 451; *H. Falkenheiner*, La Recherche Aeronautique 17 (1950).

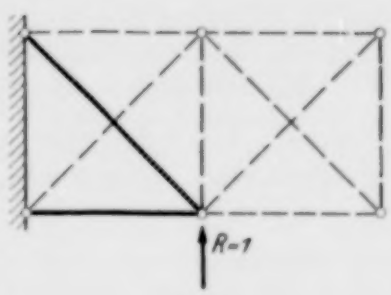
[2] *C. B. Biezeno* u. *R. Grammel*, Technische Dynamik, Kap. II, Ziff. **9** und **10**, 1. Aufl. Berlin 1939.

z. B. aus Fertigungsfehlern oder Lagerverschiebungen entstehen[1] (Abb. 2a).

Die Beziehung zwischen ϵ und r ist eine kinematische und kann von den Verträglichkeitsbedingungen abgeleitet werden. Im folgenden benennen wir die Verträglichkeitsbedingungen als kinematische Verträglichkeitsbedingungen.



Zustand ε



Zustand $\bar{\sigma}$,

Abb. 2a. Das Einheitslastgesetz.

Wir führen auch ein:

$\bar{\sigma}_1$ ein (virtueller) Spannungszustand infolge einer Kraft $R = 1$ in Richtung von r, der nur den statischen, aber nicht den kinematischen Verträglichkeitsbedingungen zu genügen braucht. Der Spannungszustand ist so gewählt, daß keine Verschiebungen des Zustandes ϵ in Richtung der mit $R = 1$ im Gleichgewicht befindenden Kräften stattfinden (Abb. 2a).

Wir bezeichnen $\bar{\sigma}_1$ als einen statisch verträglichen Spannungszustand. In allen folgenden Entwicklungen beziehen sich überstrichene Größen auf statisch verträgliche Spannungsverteilungen.

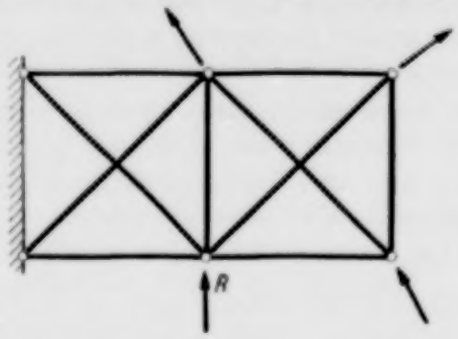
Das Einheitslastgesetz ersetzt nun die kinematische Beziehung zwischen ϵ und r unter Benutzung der statisch verträglichen $\bar{\sigma}_1$; es schreibt sich[2]

$$1 \cdot r = \int \bar{\sigma}_1' \epsilon \, dV \,, \qquad (2a)$$

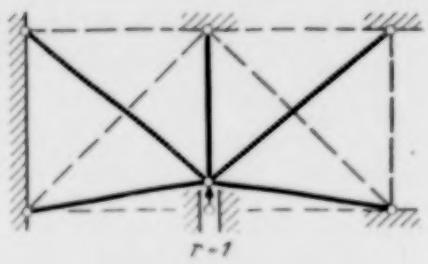
wo sich die Integration über das ganze Volumen erstreckt[3]. Gleichung (2a) läßt sich am einfachsten vom Prinzip der virtuellen Kräfte ableiten.

wie sie z. B. aus Fertigungsfehlern oder Lagerverschiebungen entstehen[1] (Abb. 2b).

Die Beziehung zwischen σ und R ist eine statische und kann von den Gleichgewichtsbedingungen abgeleitet werden. Im folgenden benennen wir die Gleichgewichtsbedingungen als statische Verträglichkeitsbedingungen.



Zustand σ



Zustand $\underline{\varepsilon}$,

Abb. 2b. Das Einheitsverschiebungsgesetz.

Wir führen auch ein:

$\underline{\epsilon}_1$ ein (virtueller) Verzerrungszustand infolge einer Verschiebung $r = 1$ in Richtung von R, der nur den kinematischen, aber nicht den statischen Verträglichkeitsbedingungen zu genügen braucht. Der Verzerrungszustand ist so gewählt, daß keine Kräfte des Zustandes σ in Richtung der mit $r = 1$ assoziierten Verschiebungen wirken (Abb. 2b).

Wir bezeichnen $\underline{\epsilon}_1$ als einen kinematisch verträglichen Verzerrungszustand. In allen folgenden Entwicklungen beziehen sich unterstrichene Größen auf kinematisch verträgliche Verzerrungsverteilungen.

Das Einheitsverschiebungsgesetz ersetzt nun die statische Beziehung zwischen σ und R unter Benutzung der kinematisch verträglichen $\underline{\epsilon}_1$; es schreibt sich[2]

$$1 \cdot R = \int \underline{\epsilon}_1' \sigma \, dV \,, \qquad (2b)$$

wo sich die Integration über das ganze Volumen erstreckt[3]. Gleichung (2b) läßt sich am einfachsten vom Prinzip der virtuellen Verschiebungen ableiten.

[1] Wir gebrauchen im folgenden die kollektive Bezeichnung: gegebene Beanspruchung für diese verschiedene Belastungsarten.

[2] Vgl. Fußnote 2 S. 174.

[3] Ein Apostroph bezeichnet die transponierte oder gespiegelte Matrix.

Da das Gesetz (2a) nur kinematische, aber nicht statische Beziehungen ersetzt, ist eigentlich nicht notwendig, daß $\boldsymbol{\epsilon}$ ein wahrer Verzerrungszustand ist; es genügt daß

$$\boldsymbol{\epsilon} = \underline{\boldsymbol{\epsilon}}$$

ist, wo $\underline{\boldsymbol{\epsilon}}$ ein kinematisch verträglicher Verzerrungszustand infolge der gegebenen Beanspruchung ist.

Da das Gesetz (2b) nur statische, aber nicht kinematische Beziehungen ersetzt, ist eigentlich nicht notwendig, das $\boldsymbol{\sigma}$ ein wahrer Spannungszustand ist; es genügt das

$$\boldsymbol{\sigma} = \bar{\boldsymbol{\sigma}}$$

ist, wo $\bar{\boldsymbol{\sigma}}$ ein statisch verträglicher Spannungszustand infolge der gegebenen Beanspruchung ist.

c) Anwendung auf Tragwerke. Wir interessieren uns hier besonders für die Anwendung der Matrizentheorie der Statik auf Tragwerke. Jedes Tragwerk wird für die praktische Berechnung in eine endliche Anzahl von Elementen zerlegt. Wir setzen voraus, daß die Spannungen und Verzerrungen in jedem Elemente vollständig bestimmt sind, wenn gewisse Kräfte oder Spannungen S und Verschiebungen oder Verzerrungen v an den Rändern des Elements bekannt sind. Das einfachste Beispiel eines Elementes ist ein Stab in einem idealen Fachwerk; hier genügt es, eine Spannung oder Verzerrung in jedem Elemente vorzuschreiben, um das ganze Spannungs- oder Verzerrungsfeld zu kennen. In einem kontinuierlichen Tragwerk wie einem Flugzeugflügel unterteilen wir das System mit einem Netz von Linien und benennen wieder die Teile des Tragwerkes, die zwischen zwei sich schneidenden Paaren von benachbarten Netzlinien liegen, als Elemente. Die Schnittpunkte der Netzlinien[1] werden als Knotenpunkte bezeichnet. Es wird im allgemeinen angenommen, daß die äußeren Kräfte an den Knotenpunkten wirken[2], und daß die Längsspannungen linear[2] zwischen benachbarten Punkten variieren. Wir können hier nicht auf die näheren Einzelheiten des Verfahrens eingehen, verweisen aber auf die frühere Arbeit[3].

Wir betrachten jetzt ein Tragwerk, das aus l Elementen besteht. Äußere Kräfte $R_1 \cdots R_m$ oder Verschiebungen $r_1 \cdots r_m$ können an m Knotenpunkten des Systems vorgeschrieben sein.

Die folgenden Bezeichnungen werden eingeführt:

$$\left.\begin{array}{ll} \boldsymbol{R} = \{R_1 \cdots R_m\} & \text{Äußere Kräfte,} \\ \boldsymbol{S} = \{S_1 \cdots S_l\} & \text{Spannungen oder Kräfte an den } l \text{ Elementen infolge } \boldsymbol{R}, \\ \boldsymbol{r} = \{r_1 \cdots r_m\} & \text{Verschiebungen in Richtung von } \boldsymbol{R}, \\ \boldsymbol{v} = \{v_1 \cdots v_l\} & \text{Verzerrungen der } l \text{ Elemente infolge } \boldsymbol{r}. \end{array}\right\} \quad (3)$$

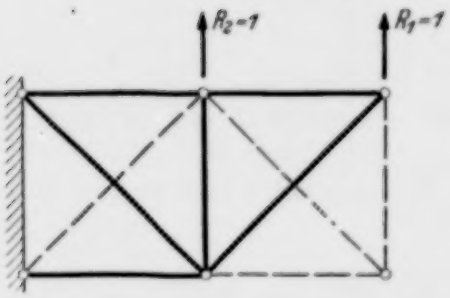
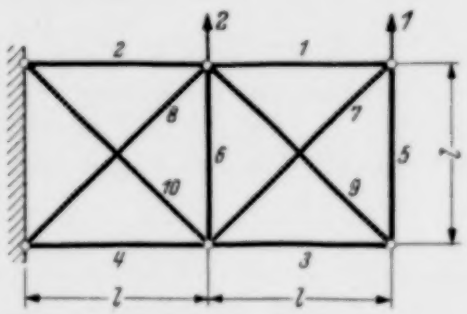


Abb. 3a. Beispiel für die Berechnung einer $\underline{a}$-Matrix.



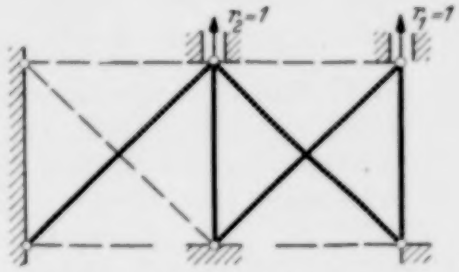


Abb. 3b. Beispiel für die Berechnung einer $\bar{b}$-Matrix.

Wenn mehr als eine Spannung oder Verzerrung in den Elementen vorgeschrieben ist, bezeichnen S_1, v_1 usw. Untermatrizen. Der Verschiebungszustand $(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{v})$ und der Spannungszustand $(\boldsymbol{R}, \boldsymbol{S})$ können unabhängig von einander sein. Man beachte, daß $\boldsymbol{R}$, $\boldsymbol{S}$, $\boldsymbol{r}$ und $\boldsymbol{v}$ Spaltenmatrizen sind.

Das Einheitslastgesetz

Wenn $\bar{\boldsymbol{S}}$ ein statisch verträglicher Spannungszustand, der den Kräften $\boldsymbol{R}$ entspricht, ist, dann können wir immer

$$\bar{\boldsymbol{S}} = \bar{\boldsymbol{b}}\,\boldsymbol{R} \qquad (4a)$$

Das Einheitsverschiebungsgesetz

Wenn $\underline{\boldsymbol{v}}$ ein kinematisch verträglicher Verzerrungszustand, der Verschiebungen $\boldsymbol{r}$ entspricht, ist, dann können wir immer

$$\underline{\boldsymbol{v}} = \underline{\boldsymbol{a}}\,\boldsymbol{r} \qquad (4b)$$

[1] Die Netzlinien brauchen nicht orthogonal zu sein.
[2] Diese Annahmen sind nicht notwendig, siehe Abschnitt 4 a).
[3] Vgl. Fußnote 2 von S. 174.

setzen, wo $\bar{b}$ eine rechteckige Matrize, die sich lediglich aus statischen Beziehungen berechnet, ist (siehe auch die Definition von $\bar{\sigma}_1$). Man beachte, daß (4a) auch für nichtlineare Systeme gültig ist.

Als Beispiel einer $\bar{b}$ Matrix betrachten wir den statischen verträglichen Spannungszustand in Abb. 3a. Hier ist

$$\bar{b} = \begin{array}{c} \begin{matrix} R_1 & R_2 & \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 2 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ -\sqrt{2} & -\sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \\ 10 \end{matrix} \end{array} \tag{5a}$$

Über jeder Spalte ist die zugehörige Kraft angegeben. Die Zahl in kursivem Druck neben jeder Spalte bezieht sich auf die Numerierung der Stäbe in Abb. 3.

Wir können nun leicht zeigen, daß das Einheitslastgesetz (2a) für Tragwerke in folgender einfacher Form geschrieben werden kann:

$$\boldsymbol{r} = \bar{\boldsymbol{b}}' \boldsymbol{v} . \tag{6a}$$

An Stelle von $\boldsymbol{v}$ kann man einen kinematisch verträglichen Zustand $\underline{\boldsymbol{v}}$ einführen und erhält unter Benutzung von (6b)

setzen, wo $\underline{a}$ eine rechteckige Matrize, die sich lediglich aus kinematischen Beziehungen berechnet, ist (siehe auch die Definition von $\underline{\epsilon}_1$). Man beachte, daß (4b) auch für nichtlineare Systeme gültig ist.

Als Beispiel einer $\underline{a}$ Matrix betrachten wir den kinematisch verträglichen Verzerrungszustand in Abb. 3b. Hier ist

$$\underline{a} = \begin{array}{c} \begin{matrix} r_1 & r_2 & \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \\ 10 \end{matrix} \end{array} \tag{5b}$$

Über jeder Spalte ist die zugehörige Verschiebung angegeben. Die Zahl in kursivem Druck neben jeder Spalte bezieht sich auf die Numerierung der Stäbe in Abb. 3.

Wir können nun leicht zeigen, daß das Einheitsverschiebungsgesetz für Tragwerke in folgender einfacher Form geschrieben werden kann:

$$\boldsymbol{R} = \underline{\boldsymbol{a}}' \boldsymbol{S} . \tag{6b}$$

An Stelle von $\boldsymbol{S}$ kann man einen statisch verträglichen Zustand $\bar{\boldsymbol{S}}$ einführen und erhält unter Benutzung von (6a)

$$\bar{\boldsymbol{b}}' \underline{\boldsymbol{a}} = \boldsymbol{E} = \underline{\boldsymbol{a}}' \bar{\boldsymbol{b}} , \tag{7}$$

wo $\boldsymbol{E}$ eine Einheitsmatrix ist. Die interessante Beziehung (7) läßt sich auch direkt herleiten. Selbstverständlich setzt (7) voraus, daß die Anzahl und Richtungen der Kräfte $\boldsymbol{R}$ in (6b) und Verschiebungen $\boldsymbol{r}$ in (6a) übereinstimmen. Wir bestätigen leicht, daß die Gleichungen (5) die Beziehung (7) erfüllen.

Statisch bestimmte Tragwerke

Wenn $\boldsymbol{S}$ die wahren Spannungen infolge $\boldsymbol{R}$ sind, dann gilt für statisch bestimmte Tragwerke immer

$$\boldsymbol{S} = \boldsymbol{b} \boldsymbol{R} , \tag{8a}$$

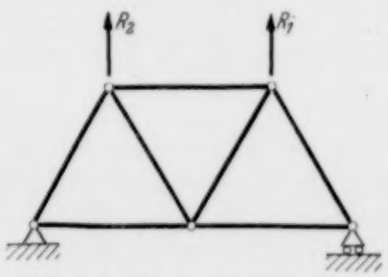


Abb. 4a. Statisch bestimmtes System.

wo die Matrix $\boldsymbol{b}$ sich lediglich aus den Gleichgewichtsbedingungen ermitteln läßt. Demnach

Kinematisch bestimmte Tragwerke

Wenn $\boldsymbol{v}$ die wahren Verzerrungen infolge $\boldsymbol{r}$ sind, dann gilt für kinematisch bestimmte Tragwerke immer

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{a} \boldsymbol{r} , \tag{8b}$$

Abb. 4b. Kinematisch bestimmtes System.

wo die Matrix $\boldsymbol{a}$ sich lediglich aus den Verträglichkeitsbedingungen ermitteln läßt. Demnach

ist $\bar{\bar{\boldsymbol{b}}} \equiv \boldsymbol{b}$.

Ein Beispiel eines statisch bestimmten Tragwerkes zeigt Abb. 4a.

ist $\underline{\underline{\boldsymbol{a}}} \equiv \boldsymbol{a}$.

Ein Beispiel eines kinematisch bestimmten Tragwerkes zeigt Abb. 4b.

3. Anwendung auf linearelastische Systeme. Wir beschränken uns in diesem und den folgenden Abschnitten auf linearelastische Systeme, für die also das *Hooke*sche Gesetz gilt.

a) Die Einheitsgesetze.

Das Einheitslastgesetz

Die Anwendung des Prinzips der virtuellen Kräfte führt bei linearelastischen Systemen auf eine zweite Formulierung des Einheitslastgesetzes, die der von (2a) äquivalent ist. Wir finden

$$1 \cdot r = \int \boldsymbol{\sigma}_1' \boldsymbol{\epsilon}\, dV = \int \boldsymbol{\sigma}_1' \bar{\boldsymbol{\epsilon}}\, dV\,, \qquad (9a)$$

wo der erste Ausdruck für die wahre Verschiebung r in Abschnitt 2′ a) erläutert ist und $\bar{\boldsymbol{\epsilon}}$ ein Verzerrungszustand, der einem statisch verträglichen Spannungszustand $\bar{\boldsymbol{\sigma}}$ infolge der gegebenen Beanspruchung entspricht, ist [man kann demnach $\bar{\boldsymbol{\epsilon}}$ in jedem geeigneten statisch äquivalenten — z. B. einem statisch bestimmten — Teilsystem finden (Abb. 5a)] und $\boldsymbol{\sigma}_1$ der wahre Spannungszustand infolge $R = 1$ ist.

Wie im Falle der nichtlinearen Systeme setzt (9a) voraus, daß keine mit r assoziierten Verschiebungen in Richtung der mit $R = 1$ im Gleichgewicht befindlichen Kräfte stattfinden.

Das Einheitsverschiebungsgesetz

Die Anwendung des Prinzips der virtuellen Verschiebungen führt bei linearelastischen Systemen auf eine zweite Formulierung des Einheitsverschiebungsgesetzes, die der (2b) äquivalent ist. Wir finden

$$1 \cdot R = \int \underline{\boldsymbol{\epsilon}}_1' \underline{\boldsymbol{\sigma}}\, dV = \int \boldsymbol{\epsilon}_1' \underline{\boldsymbol{\sigma}}\, dV\,, \qquad (9b)$$

wo der erste Ausdruck für die wahre Kraft R in Abschnitt 2′ a) erläutert ist und $\underline{\boldsymbol{\sigma}}$ ein Spannungszustand, der einem kinematisch verträglichen Verschiebungszustand $\underline{\boldsymbol{\epsilon}}$ infolge der gegebenen Beanspruchung entspricht, ist [man kann demnach $\underline{\boldsymbol{\sigma}}$ in jedem geeigneten kinematisch äquivalenten — z. B. einem kinematisch bestimmten — Teilsystem finden (Abb. 5b)] und $\boldsymbol{\epsilon}_1$ der wahre Verzerrungszustand infolge $r = 1$ ist.

Wie im Falle der nichtlinearen Systeme setzt (9b) voraus, daß keine mit R im Gleichgewicht befindlichen Kräfte in Richtung der mit $r = 1$ assoziierten Verschiebungen wirken.

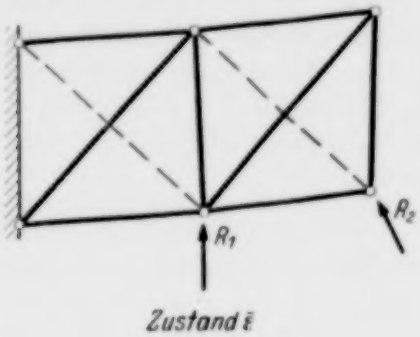


Abb. 5a. Das Einheitslastgesetz für lineare Systeme.

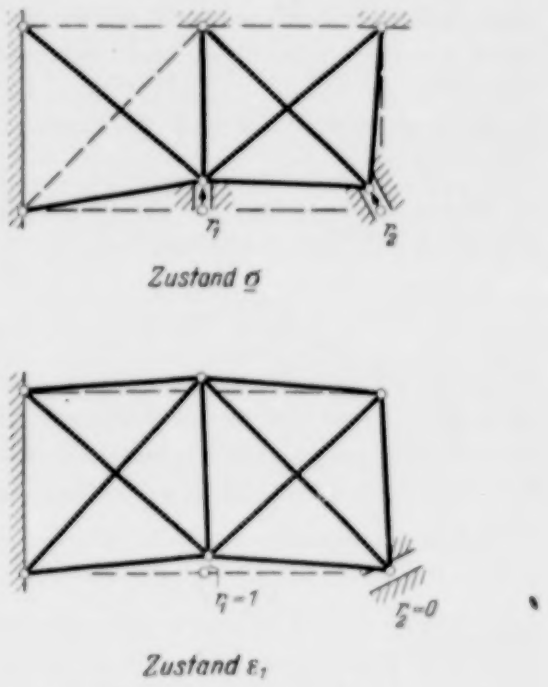


Abb. 5b. Das Einheitsverschiebungsgesetz für lineare Systeme.

Die Gleichungen (9a) und (9b) zeigen, daß es für lineare Systeme möglich ist, die wahren und verträglichen Zustände zu vertauschen. Selbstverständlich ist es zulässig, in (9a) und (9b) nur wahre Zustände zu benutzen und

$$1 \cdot r = \int \boldsymbol{\sigma}_1' \boldsymbol{\epsilon}\, dV \qquad (9c) \quad | \quad 1 \cdot R = \int \boldsymbol{\epsilon}_1' \boldsymbol{\sigma}\, dV \qquad (9d)$$

zu schreiben. Die Einführung von statisch und kinematischen verträglichen (virtuellen) Zuständen bedeutet aber, wie bekannt, eine große Vereinfachung der Theorie und der praktischen Berechnungen.

b) Anwendung auf Tragwerke.

Das Einheitslastgesetz

Wenn $\boldsymbol{S}$ wieder die Spaltenmatrix der Spannungen infolge von Lasten $\boldsymbol{R}$ bedeutet, dann gilt für alle lineare Tragwerke

$$\boldsymbol{S} = \boldsymbol{b}\,\boldsymbol{R}\,. \tag{8a}$$

Das Einheitslastgesetz (2a) und (9a) nimmt nun für lineare Tragwerke die gleichwertigen Formen

$$\boldsymbol{r} = \bar{\boldsymbol{b}}'\,\boldsymbol{v} = \boldsymbol{b}'\,\boldsymbol{v} = \boldsymbol{b}'\,\bar{\boldsymbol{v}} \tag{10a}$$

ein, wo $\bar{\boldsymbol{v}}$ der Definition von $\bar{\epsilon}$ entspricht. Die Verschiebungen $\boldsymbol{r}$ in Richtung der $\boldsymbol{R}$ können selbstverständlich wie in (9a) infolge einer beliebigen Beanspruchung entstehen. Für die mit $\boldsymbol{R}$ im Gleichgewicht befindlichen Kräfte gilt die in 3 a) erwähnte Beschränkung.

Das Einheitsverschiebungsgesetz

Wenn $\boldsymbol{v}$ wieder die Spaltenmatrix der Verzerrungen infolge von Verschiebungen $\boldsymbol{r}$ bedeutet, dann gilt für alle lineare Tragwerke

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{a}\,\boldsymbol{r}\,. \tag{8b}$$

Das Einheitsverschiebungsgesetz (2b) und (9b) nimmt nun für lineare Tragwerke die gleichwertigen Formen

$$\boldsymbol{R} = \underline{\boldsymbol{a}}'\,\boldsymbol{S} = \boldsymbol{a}'\,\boldsymbol{S} = \boldsymbol{a}'\,\underline{\boldsymbol{S}} \tag{10b}$$

ein, wo $\underline{\boldsymbol{S}}$ der Definition von σ entspricht. Die Kräfte $\bar{\boldsymbol{R}}$ in Richtung von $\boldsymbol{r}$ können selbstverständlich wie in (9b) infolge einer beliebigen Beanspruchung entstehen. Für die mit $\boldsymbol{r}$ assoziierten Verschiebungen gilt die in 3 a) erwähnte Beschränkung.

Wenn jetzt die Kräfte $\boldsymbol{R}$ in (10b) und die Verschiebungen $\boldsymbol{r}$ in (10a) an den gleichen Knotenpunkten und Richtungen wirken, dann gilt [siehe (7)].

$$\bar{\boldsymbol{b}}'\,\underline{\boldsymbol{a}} = \boldsymbol{b}'\,\boldsymbol{a} = \boldsymbol{E} = \boldsymbol{a}'\,\boldsymbol{b} = \underline{\boldsymbol{a}}'\,\bar{\boldsymbol{b}}\,. \tag{11}$$

Die Nachgiebigkeit des Tragwerks

Wir bezeichnen die Spannung und Verzerrung eines Elementes p in einem Tragwerk mit $\boldsymbol{S}_p$ und $\boldsymbol{v}_p$. Es bestehen folgende Beziehungen:

$$\boldsymbol{v}_p = \boldsymbol{f}_p\,\boldsymbol{S}_p\,, \tag{12a}$$

wo $\boldsymbol{f}_p$ als die Nachgiebigkeit des Elementes p bezeichnet wird. Wenn wir an einem Element mehr als eine Spannung und Verzerrung vorschreiben, sind $\boldsymbol{S}_p$, $\boldsymbol{v}_p$, $\boldsymbol{f}_p$ Matrizen. Die Matrix $\boldsymbol{f}_p$ ist immer symmetrisch (*Maxwell*sche Reziprozitätssatz[1]).

Das einfachste Beispiel für $\boldsymbol{f}_p$ und $\boldsymbol{k}_p$ ist durch einen Stab in einem idealen Fachwerk gegeben. Wenn hier S_p die Stabkraft und v_p die Längenänderung des Stabes sind, ist

$$f_p = \frac{l}{E\,A}\,, \tag{13a}$$

wo E, A, l augenfällige Bezeichnungen sind. Die Nachgiebigkeit und Steifigkeit von komplizierteren Elementen ist in der früheren Arbeit*, die auch die Schubverformung berücksichtigt, eingehend untersucht. Im allgemeinen sind die Definitionen der Spannung $\boldsymbol{S}_p$ und der Verzerrung $\boldsymbol{v}_p$ der Elemente im Kraft- und Deformationsverfahren verschieden.

Unter Benutzung von (3) können wir nun

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{f}\,\boldsymbol{S} \tag{12c}$$

setzen, wo

$$\boldsymbol{f} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{f}_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & \boldsymbol{f}_p & \\ & & & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \boldsymbol{f}_l \end{bmatrix} \tag{14a}$$

Die Steifigkeit des Tragwerks

Wir bezeichnen die Spannung und Verzerrung eines Elementes p in einem Tragwerk mit $\boldsymbol{S}_p$ und $\boldsymbol{v}_p$. Es bestehen folgende Beziehungen:

$$\boldsymbol{S}_p = \boldsymbol{k}_p\,\boldsymbol{v}_p\,, \tag{12b}$$

wo $\boldsymbol{k}_p$ als die Steifigkeit des Elementes p bezeichnet wird. Wenn wir an einem Element mehr als eine Verzerrung vorschreiben, sind $\boldsymbol{v}_p$, $\boldsymbol{S}_p$, k_p Matrizen. Die Matrix $\boldsymbol{k}_p$ ist immer symmetrisch (der zum *Maxwell*schen duale Reziprozitätssatz[1]).

Unter Benutzung von (3) können wir nun

$$\boldsymbol{S} = \boldsymbol{k}\,\boldsymbol{v} \tag{12d}$$

setzen, wo

$$\boldsymbol{k} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{k}_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & \boldsymbol{k}_p & \\ & & & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \boldsymbol{k}_l \end{bmatrix} \tag{14b}$$

[1] Vgl. *C. B. Biezeno* und *R. Grammel*, a. a. O., Kap. II, Ziff. 9.

* Siehe Fußnote 2 von Seite 174.

eine diagonale Matrix ist; $\boldsymbol{f}$ wird als die Nachgiebigkeit der l unverbundenen Elemente des Tragwerks bezeichnet.

eine diagonale Matrix ist; $\boldsymbol{k}$ wird als die Steifigkeit der l unverbundenen Elemente des Tragwerks bezeichnet.

Wenn in (12c) und (12d) dieselben Spannungen (Kräfte) und Verzerrungen vorgeschrieben sind, besteht die Beziehung

$$\boldsymbol{f k = E = k f}. \tag{15}$$

Anwendung der Gleichungen (10a) und (12c) ergibt für die m Verschiebungen $\boldsymbol{r}$ in Richtung und infolge der $\boldsymbol{R}$

$$\boldsymbol{r = \bar{b}' f b R = b' f b R = b' f \bar{b} = F R}. \tag{16a}$$

Anwendung der Gleichungen (10b) und (12d) ergibt für die m Kräfte $\boldsymbol{R}$ in Richtung und infolge der $\boldsymbol{r}$

$$\boldsymbol{R = \underline{a}' k a r = a' k a r = a' k \underline{a} r = K r}. \tag{16b}$$

Hierin ist

$$\boldsymbol{F = \bar{b}' f b = b' f b = b' f \bar{b}} \tag{17a}$$

die Nachgiebigkeit des Tragwerks in den vorgeschriebenen m Richtungen. Gleichung (17a) zeigt, daß die quadratische Matrix symmetrisch ist, wie es auch der *Maxwell*sche Reziprozitätssatz vorschreibt[1].

Hierin ist

$$\boldsymbol{K = \underline{a}' k a = a' k a = a' k \underline{a}} \tag{17b}$$

die Steifigkeit des Tragwerks in den vorgeschriebenen m Richtungen. Gleichung (17b) zeigt, daß die quadratische Matrix symmetrisch ist, wie es auch der zu *Maxwell* duale Reziprozitätssatz vorschreibt[1].

Die Beziehung (15) verallgemeinert sich in einem Tragwerk zu

$$\boldsymbol{F K = E = K F}. \tag{15a}$$

Der Aufbau des Tragwerks aus den verschiedenen Elementen erfolgt in (17a) durch die Matrix $\boldsymbol{b}$, die eine statische Beziehung ausdrückt. Damit können wir den Aufbau (17a) als eine verallgemeinerte Serienschaltung von Federn oder Elementen betrachten. Abb. 6a zeigt ein einfaches Beispiel einer Serienschaltung.

Der Aufbau des Tragwerks aus den verschiedenen Elementen erfolgt in (17b) durch die Matrix $\boldsymbol{a}$, die eine kinematische Beziehung ausdrückt. Damit können wir den Aufbau (17b) als eine verallgemeinerte Parallelschaltung von Federn oder Elementen betrachten. Abb. 6b zeigt ein einfaches Beispiel einer Parallelschaltung.

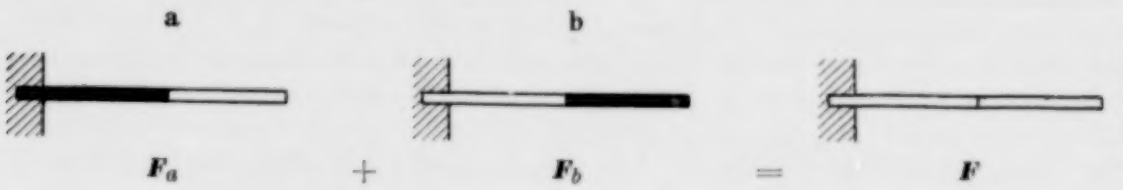


Abb. 6a. Beispiel der Serienschaltung von Elementen. Die mit Schwarz bezeichneten Teile des Kragbalkens sind jeweils als starr angenommen.

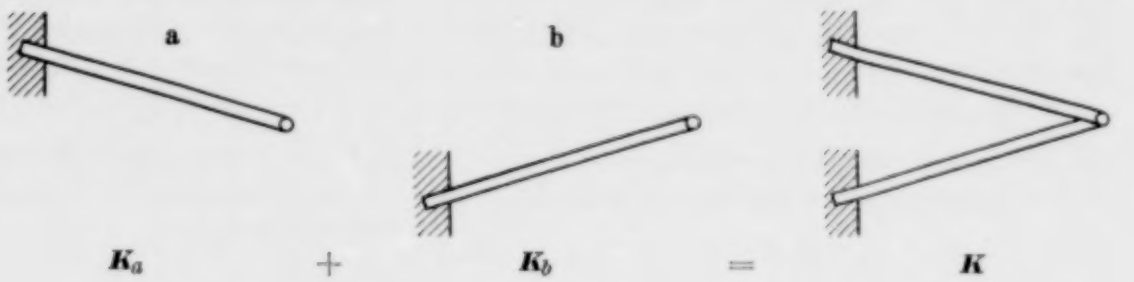


Abb. 6b. Beispiel der Parallelschaltung von Elementen.

Beispiel. Als Anwendung der Nachgiebigkeits- und Steifigkeitsmatrizen $\boldsymbol{F}$ und $\boldsymbol{K}$ betrachten wir die Eigenschwingungen eines Tragwerkes, wenn m Massen M_i an den m Knotenpunkten wirken. Wir bezeichnen mit

$$\boldsymbol{M} = \begin{bmatrix} M_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ & & & 0 \\ 0 & \cdots & 0 \; M_i \; 0 \; \cdots & 0 \\ & & & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & M_m \end{bmatrix}$$

[1] Vgl. Fußnote 2 von S. 174.

die Diagonalmatrix der Massen. Die m Eigenkreisfrequenzen ω und die Form $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_0 e^{i\omega t}$ der Eigenschwingungen des Tragwerkes berechnen sich

entweder aus[1]

$$\left.\begin{aligned} &\left|\boldsymbol{F}\boldsymbol{M} - \frac{1}{\omega^2}\boldsymbol{E}\right| = 0 \\ \text{und}\quad &\left[\boldsymbol{F}\boldsymbol{M} - \frac{1}{\omega^2}\boldsymbol{E}\right]\boldsymbol{r}_0 = \boldsymbol{0}\,. \end{aligned}\right\} \qquad (18a)$$

oder aus[1]

$$\left.\begin{aligned} &\left|\boldsymbol{M}^{-1}\boldsymbol{K} - \omega^2\boldsymbol{E}\right| = 0 \\ \text{und}\quad &\left[\boldsymbol{M}^{-1}\boldsymbol{K} - \omega^2\boldsymbol{E}\right]\boldsymbol{r}_0 = \boldsymbol{0}\,. \end{aligned}\right\} \qquad (18b)$$

Allgemeinere Massenverteilungen lassen sich ohne weiteres berücksichtigen. Da die Nachgiebigkeit (Steifigkeit) sich nicht nur auf Kräfte (Verschiebungen), sondern auch auf Momente (Verdrehungen) bezieht, ist es leicht möglich, die Rotationsträgheit in die Rechnungen einzusetzen.

Die Untersuchungen von Schwingungen in Balken und Rahmen, deren $\boldsymbol{F}$ oder $\boldsymbol{K}$ (mit Berücksichtigung der Schubverformung) einfach zu ermitteln ist, ergeben interessante Übungsbeispiele.

4. Die Berechnung von Tragwerken.

Wir untersuchen in diesem Abschnitt eine Reihe von Problemen in Tragwerken, deren Spannungen nicht durch statische Betrachtungen allein ermittelt werden können. Wir bezeichnen derartige Tragwerke als statisch unbestimmt. Die überbestimmten Größen heißen statisch unbestimmte Kräfte oder Spannungen. Abb. 7a zeigt ein zweifach statisch unbestimmtes Fachwerk.

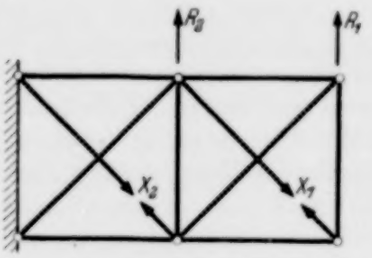


Abb. 7a. Zweifach statisch unbestimmtes System.

Wir untersuchen in diesem Abschnitt eine Reihe von Problemen in Tragwerken, deren Verzerrungen nicht durch kinematische Betrachtungen allein ermittelt werden können. Wir bezeichnen derartige Tragwerke als kinematisch unbestimmt. Die überbestimmten Größen heißen kinematisch unbestimmte Verschiebungen oder Verzerrungen. Abb. 7b zeigt ein sechsfach kinematisch unbestimmtes Fachwerk (r_1 und r_2 vorgeschrieben, U_1 bis U_6 unbekannt).

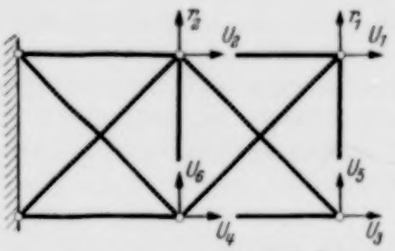


Abb. 7a. Sechsfach kinematisch unbestimmtes System.

a) Problem I.

In einem n-fach statisch unbestimmten[2] Tragwerk seien die m Kräfte R gegeben (Abb. 7a). Es sollen die statisch unbestimmte Kraft- oder Spannungsmatrix

$$\boldsymbol{X} = \{X_1\, X_2 \ldots\ldots\ldots\ldots X_n\} \qquad (19a)$$

und die Spannungen $\boldsymbol{S}$ bestimmt werden.

Die vollständige Kraftmatrix schreibt sich

$$\{\boldsymbol{R}\,\boldsymbol{X}\}\,. \qquad (20a)$$

Wir können nun die Spannungen $\boldsymbol{S}$ in der Form sehen

$$\boldsymbol{S} = \boldsymbol{b}_0\boldsymbol{R} + \boldsymbol{b}_1\boldsymbol{X} = \boldsymbol{b}\,\boldsymbol{R}\,, \qquad (21a)$$

wo die Matrizen $\boldsymbol{b}_0$ und $\boldsymbol{b}_1$ aus statischen Betrachtungen berechnet werden und $\boldsymbol{b}$ noch unbekannt ist. Das Teilsystem, in dem $\boldsymbol{b}_0$ ermittelt wird, benennen wir das statische Grundsystem.

In einem n-fach kinematisch unbestimmten[2] Tragwerk seien die m Verschieb-r vorgeschrieben (Abb. 7b). Es sollen die kinematisch unbestimmte Verschiebungsmatrix

$$\boldsymbol{U} = \{U_1\, U_2 \ldots\ldots\ldots U_n\} \qquad (19b)$$

und die Verzerrungen $\boldsymbol{v}$ bestimmt werden.

Die vollständige Verschiebungsmatrix schreibt sich

$$\{\boldsymbol{r}\,\boldsymbol{U}\}\,. \qquad (20b)$$

Wir können nun die Verzerrungen $\boldsymbol{U}$ in der Form sehen

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{a}_0\boldsymbol{r} + \boldsymbol{a}_1\boldsymbol{U} = \boldsymbol{a}\,\boldsymbol{r}\,, \qquad (21b)$$

wo die Matrizen $\boldsymbol{a}_0$ und $\boldsymbol{a}_1$ aus kinematischen Betrachtungen berechnet werden und $\boldsymbol{a}$ noch unbekannt ist. Das Teilsystem, in dem $\boldsymbol{a}_0$ ermittelt wird, benennen wir das kinematische Grundsystem.

[1] Selbstverständlich ist die Determinantengleichung in (18a) bzw. (18b) in der folgenden Matrizengleichung enthalten.

[2] Die Anzahl der statisch und kinematisch überbestimmten Größen eines Tragwerks ist selbstverständlich im allgemeinen verschieden; vgl. auch Abb. 7a u. 7b.

Um die X zu ermitteln, wenden wir die Methode der Einheitslast (10a) auf die Verträglichkeitsbedingung in Richtung von X an. Wir finden

$$b_1' r = b_1' f S = b_1' f b_0 R + b_1' f b_1 X = 0$$

oder

$$X = -D^{-1} D_0 R , \qquad (22a)$$

wo

$$D = b_1' f b_1 \quad \text{und} \quad D_0 = b_1' f b_0 . \qquad (23a)$$

Somit folgt aus (21a) und (22a)

$$b = b_0 - b_1 D^{-1} D_0 , \qquad (24a)$$

womit die Spannungen und Verzerrungen im Tragwerk bekannt sind.

Um die Verschiebungen r in Richtung der Kräfte R zu bestimmen, benutzen wir wieder (10a) und erhalten

$$r = \bar{b}' r = \bar{b}' f b R = F R . \qquad (25a)$$

Wir können für $\bar{b}$ (das statisch verträgliche System) b_0 einsetzen. Somit ist die Nachgiebigkeit des Systems

$$F = F_0 - D_0' D^{-1} D_0 . \qquad (26a)$$

Hierin ist $F_0 = b_0' f b_0$ die Nachgiebigkeit des Grundsystems.

Es ist besonders zu beachten, daß die Berechnung des Systems nach dem Kraftverfahren nur die Matrizen b_0, b_1, f und die Spaltenmatrix R benötigt.

Beispiel. Für das zweifach statisch unbestimmte Fachwerk in Abb. 7a soll die Matrix b und die Nachgiebigkeit F unter den Bedingungen bestimmt werden, daß alle Stäbe die gleiche Nachgiebigkeit l/EA besitzen.

Die gewählten statisch unbestimmten Größen sind in Abb. 7a angegeben. Die entsprechenden Matrizen b_0 und b_1 folgen aus elementaren statischen Betrachtungen. Es ist

$$X = \{X_1\ X_2\} ,$$

$$b_0 = \begin{array}{c} \begin{matrix} R_1 & R_2 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -2 & -1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ -1 & 0 \\ \sqrt{2} & 0 \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array} , \quad b_1 = \begin{array}{c} \begin{matrix} X_1 & X_2 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} -1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & -1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & -1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 0 \\ -1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \\ 10 \end{matrix} \qquad (27a)$$

Um die U zu ermitteln, wenden wir die Methode der Einheitsverschiebung (10b) auf die Gleichgewichtsbedingung in Richtung von U an. Wir finden

$$a_1' S = a_1' k v = a_1' k a_0 r + a_1' k a_1 U = 0$$

oder

$$U = -C^{-1} C_0 r , \qquad (22b)$$

wo

$$C = a_1' k a_1 \quad \text{und} \quad C_0 = a_1' k a_0 . \qquad (23b)$$

Somit folgt aus (21b) und (22b)

$$a = a_0 - a_1 C^{-1} C_0 , \qquad (24b)$$

womit die Verzerrungen und Spannungen im Tragwerk bekannt sind.

Um die Kräfte R in Richtung der Verschiebungen r zu bestimmen, benutzen wir wieder (10b) und erhalten

$$R = \underline{a}' S = \underline{a}' k a r = K r . \qquad (25b)$$

Wir können für $\underline{a}$ (das kinematisch verträgliche System) a_0 einsetzen. Somit ist die Steifigkeit des Systems

$$K = K_0 - C_0' C^{-1} C_0 . \qquad (26b)$$

Hierin ist $K_0 = a_0' k a_0$ die Steifigkeit des Grundsystems.

Es ist besonders zu beachten, daß die Berechnung des Systems nach dem Deformationsverfahren nur die Matrizen a_0, a_1, k und die Spaltenmatrix r benötigt.

Beispiel. Für das sechsfach kinematisch unbestimmte Fachwerk in Abb. 7b soll die Matrix a und die Steifigkeit K unter den Bedingungen bestimmt werden, daß alle Stäbe die gleiche Steifigkeit EA/l besitzen.

Die gewählten kinematisch unbestimmten Größen sind in Abb. 7b angegeben. Die entsprechenden Matrizen a_0 und a_1 folgen aus elementaren kinematischen Betrachtungen. Es ist

$$U = \{U_1\ U_2\ U_3\ U_4\ U_5\ U_6\} ,$$

$a_0 = \underline{a}$ aus (5b) da Grundsysteme identisch,

$$a_1 = \begin{array}{c} \begin{matrix} U_1 & U_2 & U_3 & U_4 & U_5 & U_6 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1/\sqrt{2} & 0 & 0 & -1/\sqrt{2} & 0 & -1/\sqrt{2} \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 & -1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/\sqrt{2} & 0 & -1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \end{array} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \\ 10 \end{matrix} \qquad (27b)$$

Hier bezieht sich die Zahl in kursivem Druck neben jeder Zeile auf die Numerierung der Stäbe in Abb. 3 und Abb. 8. Über jeder Spalte ist die zugehörige Kraft oder Verschiebung angegeben.

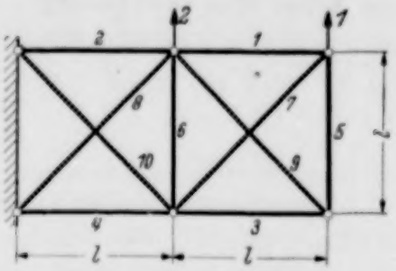


Abb. 8. Numerierung der Stäbe.

Die Nachgiebigkeit der unverbundenen Elemente ist

$$\boldsymbol{f} = \frac{l}{EA}\boldsymbol{E}_{10}, \tag{28a}$$

Die Steifigkeit der unverbundenen Elemente ist

$$\boldsymbol{k} = \frac{EA}{l}\boldsymbol{E}_{10}, \tag{28b}$$

wo der Index 10 die Anzahl der Diagonalelemente in der Einheitsmatrix angibt.

Anwendung der Gleichung (24a) ergibt[1]

$$\boldsymbol{b} = \frac{1}{55}\begin{array}{c} \begin{matrix} R_1 & R_2 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} -31 & -3 \\ -82 & -31 \\ 24 & -3 \\ 83 & 24 \\ 24 & -3 \\ -3 & 21 \\ 31\sqrt{2} & 3\sqrt{2} \\ 27\sqrt{2} & 31\sqrt{2} \\ -24\sqrt{2} & 3\sqrt{2} \\ -28\sqrt{2} & -24\sqrt{2} \end{bmatrix} \end{array} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \\ 10 \end{matrix} \tag{29a}$$

Anwendung der Gleichung (24b) ergibt[1]

$$\boldsymbol{a} = \frac{1}{335}\begin{array}{c} \begin{matrix} r_1 & r_2 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} -45 & 55 \\ -62 & -21 \\ 48 & -81 \\ 81 & -32 \\ 48 & -81 \\ -57 & 159 \\ 45\sqrt{2} & -55\sqrt{2} \\ -31\sqrt{2} & 157\sqrt{2} \\ -48\sqrt{2} & 81\sqrt{2} \\ 12\sqrt{2} & -104\sqrt{2} \end{bmatrix} \end{array} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \\ 10 \end{matrix} \tag{29b}$$

Für die Nachgiebigkeit des Tragwerks finden wir aus (26a)

$$\boldsymbol{F} = \frac{l}{55\,EA}\begin{bmatrix} 397 & 136 \\ 136 & 93 \end{bmatrix} \tag{30a}$$

Für die Steifigkeit des Tragwerks finden wir aus (26b)

$$\boldsymbol{K} = \frac{EA}{335\,l}\begin{bmatrix} 93 & -136 \\ -136 & 397 \end{bmatrix}. \tag{30b}$$

Wir bestätigen leicht, daß die Beziehungen $\boldsymbol{b}'\,\boldsymbol{a} = \boldsymbol{E}_2$ und $\boldsymbol{F}\,\boldsymbol{K} = \boldsymbol{E}_2$ erfüllt sind.

b) Problem II.

In einem n-fach statisch unbestimmten Tragwerk seien die Verschiebungen $\boldsymbol{r}$ vorgeschrieben. Es sollen $\boldsymbol{X}$ und $\boldsymbol{S}$ berechnet werden. Die Kräfte $\boldsymbol{R}$ sind hier unbekannt, können aber aus (25a) berechnet werden. Es ist

$$\boldsymbol{R} = \boldsymbol{F}^{-1}\boldsymbol{r}. \tag{31a}$$

Damit ist dieses Problem auf Problem I zurückgeführt.

In einem n-fach kinematisch unbestimmten Tragwerk seien die Kräfte $\boldsymbol{R}$ vorgeschrieben. Es sollen $\boldsymbol{U}$ und $\boldsymbol{v}$ berechnet werden. Die Verschiebungen $\boldsymbol{r}$ sind hier unbekannt, können aber aus (26b) berechnet werden. Es ist

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{K}^{-1}\boldsymbol{R}. \tag{31b}$$

Damit ist dieses Problem auf Problem I zurückgeführt.

c) Problem III.

Wir bezeichnen als Anfangsverzerrungen H die auf die *unverbundenen* Elemente eingeprägten Verzerrungen infolge von Temperaturänderungen, Fertigungsfehlern, Lagerverschiebungen, Lasten *auf* Elementen, usw. Ein einfaches Beispiel einer Anfangsverzerrung liegt

Wir bezeichnen als Zwangsspannungen J die auf die Elemente mit *festgehaltenen Knotenpunkten* eingeprägte Spannungen infolge von Temperaturänderungen, Fertigungsfehlern, Lagerverschiebungen, Lasten *auf* Elementen usw. Ein einfaches Beispiel einer Zwangsspannung

[1] Aus Platzersparnisgründen sind hier die Matrizen $\boldsymbol{C}, \boldsymbol{C}^{-1}$ und $\boldsymbol{D}, \boldsymbol{D}^{-1}$ nicht wiedergegeben.

in einem Fachwerk vor, dessen Stab p von der Länge l_p einer Temperaturänderung Θ_p ausgesetzt ist. Dann ist die Längenänderung des Stabes

$$H_p = l_p \alpha_p \Theta_p ,$$

wo α_p der Temperaturausdehnungskoeffizient ist. Wenn mehr als eine Verzerrung im Element vorgeschrieben ist, wird H_p eine entsprechende Spaltenmatrix[1] $\boldsymbol{H}_p$.

Der Aufbau des Tragwerks aus den verzerrten unverbundenen Elementen wird im allgemeinen einen zusätzlichen Spannungszustand benötigen, wenn das System statisch unbestimmt ist.

Wir untersuchen nun folgendes Problem. Es seien vorgeschrieben: 1) die Matrix der Anfangsverzerrungen der unverbundenen Elemente

$$\boldsymbol{H} = \{\boldsymbol{H}_1 \ldots\ldots \boldsymbol{H}_p \ldots\ldots \boldsymbol{H}_l\} \quad (32a)$$

und 2) die m Kräfte $\boldsymbol{R} = \boldsymbol{0}$ an den Knotenpunkten.

Es sollen wieder $\boldsymbol{X}$ und $\boldsymbol{S}$ berechnet werden. Die gesamte Verzerrung der Elemente ist die Summe der elastischen und der eingeprägten Anfangsverzerrungen. Somit ist

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{f}\,\boldsymbol{b}_1\,\boldsymbol{X} + \boldsymbol{H} . \quad (33a)$$

Anwendung von (10a) und (33a) ergibt

$$\boldsymbol{b}_1' \boldsymbol{v} = \boldsymbol{D}\boldsymbol{X} + \boldsymbol{b}_1' \boldsymbol{H} = \boldsymbol{0}$$

und

$$\boldsymbol{X} = -\boldsymbol{D}^{-1} \boldsymbol{b}_1' \boldsymbol{H} . \quad (34a)$$

Damit wird

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{S} &= \boldsymbol{b}_1 \boldsymbol{X} = -\boldsymbol{b}_1 \boldsymbol{D}^{-1} \boldsymbol{b}_1' \boldsymbol{H} \\ \text{und} \\ \boldsymbol{v} &= -\boldsymbol{f}\,\boldsymbol{b}_1 \boldsymbol{D}^{-1} \boldsymbol{b}_1' \boldsymbol{H} + \boldsymbol{H} . \end{aligned}\right\} \quad (35a)$$

Die Verschiebungen[2] $\boldsymbol{r}$ der m Knotenpunkte infolge von $\boldsymbol{H}$ berechnen sich wieder aus (10a). Wir finden

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{b}_0' \boldsymbol{v} = \boldsymbol{b}' \boldsymbol{H} , \quad (36a)$$

wo $\boldsymbol{b}_0$ und $\boldsymbol{b}$ in Problem I definiert sind. Die zweite Formel in (36a) zeigt, daß die Verschiebungen $\boldsymbol{r}$ eines Systems infolge von Anfangsverzerrungen $\boldsymbol{H}$ ohne die entsprechende Spannungsberechnung ermittelt werden können; es genügt, wenn die wahren Spannungen (also die Matrix $\boldsymbol{b}$) infolge von Lasten $\boldsymbol{R}$ in Richtung von $\boldsymbol{r}$ bekannt sind.

liegt in einem Fachwerk vor, dessen Stab p vom Querschnitt A_p einer Temperaturänderung Θ_p ausgesetzt ist. Dann ist die Zwangskraft im Stabe, wenn die Endknotenpunkte festgehalten sind

$$J_p = -E A_p \alpha_p \Theta_p ,$$

wo α_p der Temperaturausdehnungskoeffizient ist. Wenn mehr als eine Zwangsspannung am Element vorgeschrieben ist, wird J_p eine entsprechende Spaltenmatrix[1] $\boldsymbol{J}_p$.

Die Freilassung der festgehaltenen Knotenpunkte des Tragwerks unter Zwangsspannungen wird im allgemeinen einen zusätzlichen Verzerrungszustand hervorrufen, wenn das System kinematisch unbestimmt ist.

Wir untersuchen nun folgendes Problem. Es seien vorgeschrieben: 1) die Matrix der Zwangsspannungen in den Elementen mit festgehaltenen Knotenpunkten.

$$\boldsymbol{J} = \{\boldsymbol{J}_1 \ldots\ldots \boldsymbol{J}_p \ldots\ldots \boldsymbol{J}_l\} \quad (32b)$$

und 2) die m Verschiebungen $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{0}$ der Knotenpunkte.

Es sollen wieder $\boldsymbol{U}$ und $\boldsymbol{v}$ berechnet werden. Die gesamte Spannung in den Elementen ist die Summe der elastischen und der eingeprägten Zwangsspannungen. Somit ist

$$\boldsymbol{S} = \boldsymbol{k}\,\boldsymbol{a}_1\,\boldsymbol{U} + \boldsymbol{J} . \quad (33b)$$

Anwendung von (10b) und (33b) ergibt

$$\boldsymbol{a}_1' \boldsymbol{S} = \boldsymbol{C}\,\boldsymbol{U} + \boldsymbol{a}_1' \boldsymbol{J} = \boldsymbol{0}$$

und

$$\boldsymbol{U} = -\boldsymbol{C}^{-1} \boldsymbol{a}_1' \boldsymbol{J} . \quad (34b)$$

Damit wird

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{v} &= \boldsymbol{a}_1 \boldsymbol{U} = -\boldsymbol{a}_1 \boldsymbol{C}^{-1} \boldsymbol{a}_1' \boldsymbol{J} \\ \text{und} \\ \boldsymbol{S} &= -\boldsymbol{k}\,\boldsymbol{a}_1 \boldsymbol{C}^{-1} \boldsymbol{a}_1' \boldsymbol{J} + \boldsymbol{J} . \end{aligned}\right\} \quad (35b)$$

Die Kräfte[3] $\boldsymbol{R}$ an den m Knotenpunkten infolge $\boldsymbol{J}$ berechnen sich wieder aus (10b). Wir finden

$$\boldsymbol{R} = \boldsymbol{a}_0' \boldsymbol{S} = \boldsymbol{a}' \boldsymbol{J} , \quad (36b)$$

wo $\boldsymbol{a}_0$ und $\boldsymbol{a}$ in Problem I definiert sind. Die zweite Formel in (36b) zeigt, daß die Kräfte $\boldsymbol{R}$ eines Systems infolge von Zwangsspannungen $\boldsymbol{J}$ ohne die entsprechende Verzerrungsberechnung ermittelt werden können; es genügt, wenn die wahren Verzerrungen (also die Matrix $\boldsymbol{a}$) infolge von Verschiebungen $\boldsymbol{r}$ in Richtung von $\boldsymbol{R}$ bekannt sind.

d) Problem IV.

Es sind vorgeschrieben: 1) die Anfangsverzerrungen

$$\boldsymbol{H} = \{\boldsymbol{H}_p\}$$

Es sind vorgeschrieben: 1) die Zwangsspannungen

$$\boldsymbol{J} = \{\boldsymbol{J}_p\}$$

[1] Vgl. Fußnote 2 von S. 174.
[2] Es ist hier angenommen, daß die Verschiebungen r in Richtung der Kräfte R von Problem I stattfinden.
[3] Es ist hier angenommen, daß die Kräfte R in Richtung der Verschiebungen r von Problem I wirken.

wie in Problem III und 2) die Verschiebungen

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{0} .$$

Die Verträglichkeitsbedingung $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{0}$ wird unter Benutzung der Probleme I und III

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{F}\,\boldsymbol{R} + \boldsymbol{b}'\,\boldsymbol{H} = \boldsymbol{0} ,$$

somit

$$\boldsymbol{R} = -\boldsymbol{F}^{-1}\,\boldsymbol{b}'\,\boldsymbol{H} . \qquad (37a)$$

Die Spannungen $\boldsymbol{S}$ und Verzerrungen $\boldsymbol{r}$ ergeben sich nun aus (21a) und (34a) zu

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{S} &= -\left[\boldsymbol{b}\,\boldsymbol{F}^{-1}\,\boldsymbol{b}' + \boldsymbol{b}_1\,\boldsymbol{D}^{-1}\,\boldsymbol{b}_1'\right]\boldsymbol{H} , \\ \boldsymbol{r} &= \boldsymbol{f}\,\boldsymbol{S} + \boldsymbol{H} . \end{aligned}\right\} \qquad (38a)$$

wie in Problem III und 2) Kräfte

$$\boldsymbol{R} = \boldsymbol{0} .$$

Die Gleichgewichtsbedingung $\boldsymbol{R} = \boldsymbol{0}$ wird unter Benutzung der Probleme I und III

$$\boldsymbol{R} = \boldsymbol{K}\,\boldsymbol{r} + \boldsymbol{a}'\,\boldsymbol{J} = \boldsymbol{0} ,$$

somit

$$\boldsymbol{r} = -\boldsymbol{K}^{-1}\,\boldsymbol{a}'\,\boldsymbol{J} . \qquad (37b)$$

Die Verzerrungen $\boldsymbol{r}$ und Spannungen $\boldsymbol{S}$ ergeben sich nun aus (21b) und (34b) zu

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{r} &= -\left[\boldsymbol{a}\,\boldsymbol{K}^{-1}\,\boldsymbol{a}' + \boldsymbol{a}_1\,\boldsymbol{C}^{-1}\,\boldsymbol{a}_1'\right]\boldsymbol{J} , \\ \boldsymbol{S} &= \boldsymbol{k}\,\boldsymbol{r} + \boldsymbol{J} . \end{aligned}\right\} \qquad (38b)$$

Im allgemeinen sind in statischen Problemen die Kräfte und nicht die Verschiebungen vorgeschrieben. Somit sind bei Anwendung der Kraft- bzw. Deformationsmethode die Probleme I und III bzw. II und IV von besonderem Interesse.

e) Problem V.

Es ist in einem hochgradig statisch unbestimmten Tragwerk oft vorteilhaft, ein Grundsystem, das selbst statisch unbestimmt ist, zu wählen. Wir bezeichnen mit $\boldsymbol{Z}$ die Spaltenmatrix der statisch unbestimmten Größen im Grundsystem. Die vollständige Kraftmatrix ist dann

$$\{\boldsymbol{R}\,\boldsymbol{Z}\,\boldsymbol{X}\} .$$

Wir untersuchen nun folgende Verallgemeinerung von Problem I.

Es seien gegeben: 1) die Kräfte $\boldsymbol{R}$ und 2) die unbestimmten Größen $\boldsymbol{Z}$ für jedes $X = 1$ und $R = 1$. Es sollen $\boldsymbol{X}$ und $\boldsymbol{S}$ bestimmt werden.

Wir setzen die wahren Spannungen $\boldsymbol{S}$ wieder in der Form an

$$\boldsymbol{S} = \boldsymbol{b}_0\,\boldsymbol{R} + \boldsymbol{b}_1\,\boldsymbol{X} = \boldsymbol{b}\,\boldsymbol{R} , \qquad (21a)$$

wo die Matrizen $\boldsymbol{b}_0$ und $\boldsymbol{b}_1$ aus statischen Betrachtungen allein berechnet werden können, da $\boldsymbol{Z}$ für jedes R und X bekannt ist. Wir führen auch die Spannungsmatrix $\bar{\boldsymbol{S}}$, die mit $\boldsymbol{R}$ und $\boldsymbol{X}$ nur statisch verträglich sein braucht, ein. Es ist

$$\bar{\boldsymbol{S}} = \bar{\boldsymbol{b}}_0\,\boldsymbol{R} + \bar{\boldsymbol{b}}_1\,\boldsymbol{X} , \qquad (39a)$$

wo $\bar{\boldsymbol{b}}_0$ (bzw. $\bar{\boldsymbol{b}}_1$) eine Spannungsmatrix ist, deren jede Spalte mit dem entsprechenden $R = 1$ (bzw. $X = 1$) und $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{0}$ (bzw. $\boldsymbol{R} = \boldsymbol{0}$) statisch verträglich ist. Es ist z. B. möglich, $\bar{\boldsymbol{b}}_0$ ($\bar{\boldsymbol{b}}_1$) in einem statisch bestimmten Teilsystem zu finden, in welchem Falle die Definition von $\bar{\boldsymbol{b}}_0$ mit der von $\boldsymbol{b}_0$ im Problem I übereinstimmt.

Die Verträglichkeitsbedingung in Richtung von $\boldsymbol{X}$ ergibt unter Benutzung der zwei alternativen Formen von (10a)

$$\bar{\boldsymbol{b}}_1'\,\boldsymbol{v} = \bar{\boldsymbol{b}}_1'\,\boldsymbol{f}\,\boldsymbol{S} = \bar{\boldsymbol{b}}_1'\,\boldsymbol{f}\,\boldsymbol{b}_0\,\boldsymbol{R} + \bar{\boldsymbol{b}}_1'\,\boldsymbol{f}\,\boldsymbol{b}_1\,\boldsymbol{X} = \boldsymbol{0}$$

Es ist in einem hochgradig kinematisch unbestimmten Tragwerk oft vorteilhaft, ein Grundsystem, das selbst kinematisch unbestimmt ist, zu wählen. Wir bezeichnen mit $\boldsymbol{W}$ die Spaltenmatrix der kinematisch unbestimmten Größen im Grundsystem. Die vollständige Verschiebungsmatrix ist dann

$$\{\boldsymbol{r}\,\boldsymbol{W}\,\boldsymbol{U}\} .$$

Wir untersuchen nun folgende Verallgemeinerung von Problem I.

Es seien gegeben: 1) die Verschiebungen $\boldsymbol{r}$ und 2) die unbestimmten Größen $\boldsymbol{W}$ für jedes $U = 1$ und $r = 1$. Es sollen $\boldsymbol{U}$ und $\boldsymbol{r}$ bestimmt werden.

Wir setzen die wahren Verzerrungen $\boldsymbol{r}$ wieder in der Form an

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{a}_0\,\boldsymbol{r} + \boldsymbol{a}_1\,\boldsymbol{U} = \boldsymbol{a}\,\boldsymbol{r} , \qquad (21b)$$

wo die Matrizen $\boldsymbol{a}_0$ und $\boldsymbol{a}_1$ aus kinematischen Betrachtungen allein berechnet werden können, da $\boldsymbol{W}$ für jedes r und U bekannt ist. Wir führen auch die Verzerrungsmatrix $\underline{\boldsymbol{r}}$, die mit $\boldsymbol{r}$ und $\boldsymbol{U}$ nur kinematisch verträglich sein braucht, ein. Es ist

$$\underline{\boldsymbol{r}} = \underline{\boldsymbol{a}}_0\,\boldsymbol{r} + \underline{\boldsymbol{a}}_1\,\boldsymbol{U} , \qquad (39b)$$

wo $\underline{\boldsymbol{a}}_0$ (bzw. $\underline{\boldsymbol{a}}_1$) eine Verzerrungsmatrix ist, deren jede Spalte mit dem entsprechenden $r = 1$ (bzw. $U = 1$) und $\boldsymbol{U} = \boldsymbol{0}$ (bzw. $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{0}$) kinematisch verträglich ist. Es ist z. B. möglich, $\underline{\boldsymbol{a}}_0$ ($\underline{\boldsymbol{a}}_1$) in einem kinematisch bestimmten Teilsystem zu finden, in welchem Falle die Definition von $\underline{\boldsymbol{a}}_0$ mit der von $\boldsymbol{a}_0$ im Problem I übereinstimmt.

Die Gleichgewichtsbedingung in Richtung von U ergibt unter Benutzung der zwei alternativen Formen von (10b)

$$\underline{\boldsymbol{a}}_1'\,\boldsymbol{S} = \underline{\boldsymbol{a}}_1'\,\boldsymbol{k}\,\boldsymbol{r} = \underline{\boldsymbol{a}}_1'\,\boldsymbol{k}\,\boldsymbol{a}_0\,\boldsymbol{r} + \underline{\boldsymbol{a}}_1'\,\boldsymbol{k}\,\boldsymbol{a}_1\,\boldsymbol{U} = \boldsymbol{0}$$

oder

$$\boldsymbol{b}_1' \bar{\boldsymbol{v}} = \boldsymbol{b}_1' \boldsymbol{f} \bar{\boldsymbol{S}} = \boldsymbol{b}_1' \boldsymbol{f} \bar{\boldsymbol{b}}_0 \boldsymbol{R} + \boldsymbol{b}_1' \boldsymbol{f} \bar{\boldsymbol{b}}_1 \boldsymbol{X} = \boldsymbol{0} .$$

Somit kann $\boldsymbol{X}$ wieder durch (22a)

$$\boldsymbol{X} = - \boldsymbol{D}^{-1} \boldsymbol{R}_0 \boldsymbol{D} \tag{22a}$$

ausgedrückt werden, wo jetzt

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{D} &= \bar{\boldsymbol{b}}_1' \boldsymbol{f} \boldsymbol{b}_1 = \boldsymbol{b}_1' \boldsymbol{f} \boldsymbol{b}_1 = \boldsymbol{b}_1' \boldsymbol{f} \bar{\boldsymbol{b}}_1 \\ \text{und} \\ \boldsymbol{D}_0 &= \bar{\boldsymbol{b}}_1' \boldsymbol{f} \boldsymbol{b}_0 = \boldsymbol{b}_1' \boldsymbol{f} \boldsymbol{b}_0 = \boldsymbol{b}_1' \boldsymbol{f} \bar{\boldsymbol{b}}_0 \end{aligned}\right\} \tag{40a}$$

ist. Die Spannungsmatrix $\boldsymbol{S}$ und die Nachgiebigkeit $\boldsymbol{F}$ ermitteln sich nun aus (21a) und (26a). Die Einführung der statisch verträglichen Matrizen $\bar{\boldsymbol{b}}_0$, $\bar{\boldsymbol{b}}_1$ kann eine besondere Vereinfachung der Rechnung bedeuten.

oder

$$\boldsymbol{a}_1' \underline{\boldsymbol{S}} = \boldsymbol{a}_1' \boldsymbol{k} \underline{\boldsymbol{v}} = \boldsymbol{a}_1' \boldsymbol{k} \underline{\boldsymbol{a}}_0 \boldsymbol{r} + \boldsymbol{a}_1' \boldsymbol{k} \underline{\boldsymbol{a}}_1 \boldsymbol{U} = \boldsymbol{0} .$$

Somit kann $\boldsymbol{U}$ wieder durch (22b)

$$\boldsymbol{U} = - \boldsymbol{C}^{-1} \boldsymbol{C}_0 \boldsymbol{r} \tag{22b}$$

ausgedrückt werden, wo jetzt

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{C} &= \underline{\boldsymbol{a}}_1' \boldsymbol{k} \boldsymbol{a}_1 = \boldsymbol{a}_1' \boldsymbol{k} \boldsymbol{a}_1 = \boldsymbol{a}_1' \boldsymbol{k} \underline{\boldsymbol{a}}_1 \\ \text{und} \\ \boldsymbol{C}_0 &= \underline{\boldsymbol{a}}_1' \boldsymbol{k} \boldsymbol{a}_0 = \boldsymbol{a}_1' \boldsymbol{k} \boldsymbol{a}_0 = \boldsymbol{a}_1' \boldsymbol{k} \underline{\boldsymbol{a}}_0 \end{aligned}\right\} \tag{40b}$$

ist. Die Verzerrungsmatrix $\boldsymbol{v}$ und die Steifigkeit $\boldsymbol{K}$ ermitteln sich nun aus (21b) und (26b). Die Einführung der kinematisch verträglichen Matrizen $\underline{\boldsymbol{a}}_0$, $\underline{\boldsymbol{a}}_1$ kann eine besondere Vereinfachung der Rechnung bedeuten.

Wir bemerken abschließend, daß Probleme II bis IV ähnlich verallgemeinert werden können.

5. Anwendung der Kraftmethode auf Systeme mit Ausschnitten. Bei der praktischen Anwendung der Matrizenstatik in Verbindung mit dem elektronischen Rechenautomaten ist eine der wichtigsten Aufgaben, die sorgfältige und wiederholte Nachprüfung der Elemente (des Koeffizientenschemas) der Grundmatrizen $\boldsymbol{b}_0$, $\boldsymbol{b}_1$ und $\boldsymbol{f}$. Um die Kontrolle zu vereinfachen und leicht übersehbare Matrizen zu erhalten, ist es wichtig, alle Spezialfälle, die eine besondere Betrachtung benötigen, zu vermeiden. Ein derartiger Fall tritt z. B. in einem membranförmigen System wie einem Flügel auf, wenn einzelne Elemente zwischen den Netzlinien fehlen (Tragwerk mit Ausschnitten). Es erweist sich, daß dann im allgemeinen ein komplizierteres Grundsystem (für die Berechnung der $\boldsymbol{b}_0$-Matrix) als für das entsprechende Tragwerk ohne Ausschnitte gewählt werden muß. Auch ist es notwendig, in der Nähe der Ausschnitte besondere statisch unbestimmte Spannungssysteme $\boldsymbol{X}$, die das sonst reguläre Schema der $\boldsymbol{b}_1$-Matrix stören und die Kontrolle erschweren, einzuführen. Schließlich kann es vorkommen, daß einige der Diagonalkoeffizienten in den Gleichungen für die unbekannten $\boldsymbol{X}$ von der gleichen Größenordnung wie die übrigen Koeffizienten in den entsprechenden Gleichungen sind, und daß damit die genaue Lösung der Gleichungen auf dem Digitalautomaten erschwert wird.

Um diese Schwierigkeiten in Tragwerken mit Ausschnitten zu vermeiden, ist es vorteilhaft, einen Kunstgriff, der vom Verfasser in der bereits erwähnten Arbeit[1] entwickelt worden ist, anzuwenden. Diese Methode ist auch das ideale Verfahren, um die Neuverteilung der Spannungen infolge einer nachträglichen Einführung von Ausschnitten zu finden, ohne die ganze statische Berechnung wiederholen zu müssen.

Das Prinzip des Verfahrens ist einfach. Um eine reguläre (kontinuierliche) Konstruktion und dementsprechend ein reguläres Schema der Elemente der Grundmatrizen zu erhalten, führen wir so viele zusätzliche Elemente wie notwendig in das System ein. Obwohl die Dimensionen (Querschnitte oder Dicken) dieser neuen Elemente willkürlich sind, empfiehlt es sich, diese an die der umgebenden Teile des Tragwerkes anzupassen. Selbstverständlich werden das ursprüngliche und das neue (kontinuierliche) System unter der gleichen Beanspruchung verschiedene Spannung aufweisen. Es ist aber möglich, in den beiden Tragwerken identische Spannungen zu erzielen, wenn wir den neuen (fiktiven) Elementen des kontinuierlichen Systems derartige Anfangsverzerrungen einprägen, daß die Gesamtspannungen (infolge der gegebenen Beanspruchung und der Anfangsverzerrungen) sich in diesen Elementen auf Null reduzieren. Damit sind die neuen Elemente tatsächlich eliminiert, obwohl das reguläre Schema der Matrizen und Gleichungen erhalten bleibt. Es zeigt sich auch, daß die Matrizenformulierung uns erlaubt, die notwendigen Anfangsverzerrungen und, was noch wichtiger ist, die assoziierten Spannungen sehr einfach aus der Spannungsberechnung des kontinuierlichen Systems unter der ausschließlichen Wirkung der gegebenen Beanspruchung abzuleiten. Die wahren Spannungen im ursprünglichen System können jetzt sehr einfach aus der Spannungsuntersuchung des neuen Systems durch Überlagerung der Spannungen infolge der gegebenen Beanspruchung und der Anfangsverzerrungen bestimmt werden. Man beachte, daß nur eine statisch unbestimmte Berechnung notwendig ist: die des kontinuierlichen Systems unter der gegebenen Beanspruchung. Abb. 9 erläutert das angewandte Prinzip.

[1] Vgl. Fußnote 2 von S. 174.

Eine einfache Überlegung zeigt, daß die zu dieser Methode des Kraftverfahrens duale Methode des Deformationsverfahrens die Berechnung eines Tragwerks ergibt, von welchem einige Elemente (unendlich) starr sind. Wir werden in diesem Abschnitt nur das praktisch wichtigere Kraftverfahren mathematisch entwickeln, verweisen aber auf den nächsten Abschnitt für die Ergebnisse des dualen Verfahrens.

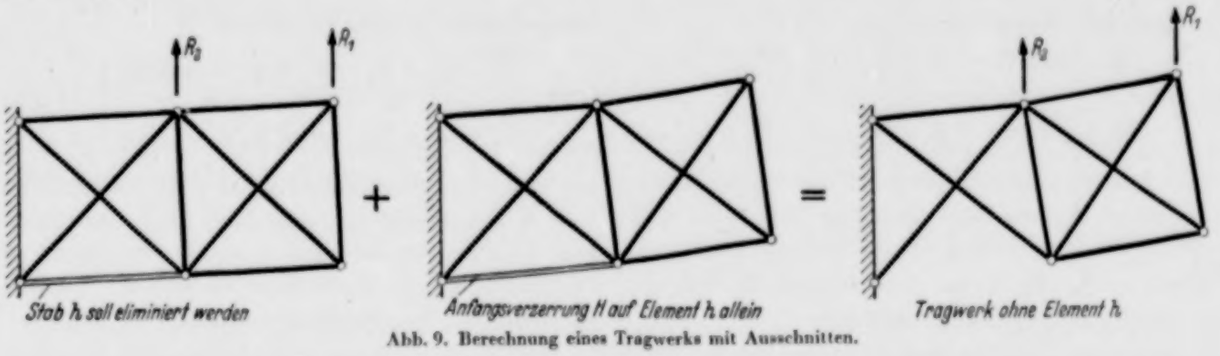


Abb. 9. Berechnung eines Tragwerks mit Ausschnitten.

Das ursprüngliche Tragwerk möge h Ausschnitte haben, die durch Einführung entsprechender Elemente ausgefüllt werden. Es sei nun $\boldsymbol{S}$ die Spannungsmatrix im kontinuierlichen System infolge der gegebenen Beanspruchung. Die Gesamtspannungen $\boldsymbol{S}_a$ einschließlich der Spannungen infolge der Anfangsverzerrungen $\boldsymbol{H}$ auf die h Elemente ermitteln sich gemäß (21a) und (39a) aus

$$\boldsymbol{S}_a = \boldsymbol{S} - \boldsymbol{b}_1 \boldsymbol{D}^{-1} \boldsymbol{b}'_{1h} \boldsymbol{H} , \tag{41}$$

wo $\boldsymbol{b}_{1h}$ die den h Elementen entsprechende Untermatrix von $\boldsymbol{b}_1$ ist. Wir erhalten nun aus der Bedingung, daß die Gesamtspannung in den h Elementen verschwindet,

$$\boldsymbol{S}_{ah} = \boldsymbol{S}_h - \boldsymbol{b}_{1h} \boldsymbol{D}^{-1} \boldsymbol{b}'_{1h} \boldsymbol{H} = \boldsymbol{0}$$

oder

$$\boldsymbol{H} = [\boldsymbol{b}_{1h} \boldsymbol{D}^{-1} \boldsymbol{b}'_{1h}]^{-1} \boldsymbol{S}_h . \tag{42}$$

Somit sind die Spannungen im ursprünglichen System mit den Ausschnitten

$$\boldsymbol{S}_a = \boldsymbol{S} - \boldsymbol{b}_1 \boldsymbol{D}^{-1} \boldsymbol{b}'_1 [\boldsymbol{b}_{1h} \boldsymbol{D}^{-1} \boldsymbol{b}'_{1h}]^{-1} \boldsymbol{S}_h . \tag{43}$$

Es ist zu beachten, daß wir bei dieser Methode die Inversion der Matrix

$$[\boldsymbol{b}_{1h} \boldsymbol{D}^{-1} \boldsymbol{b}'_{1h}]$$

benötigen. Die Anzahl r der Zeilen oder Spalten dieser Matrix ist gleich der Anzahl der Spannungen[1] S (und damit auch der Anfangsverzerrungen H) in den Elementen h. In einem hochgradig statisch unbestimmten System wie in einem Flugzeugflügel ist deswegen zu erwarten, daß r im allgemeinen viel kleiner als die Anzahl der Unbekannten im ursprünglichen System ist. Damit zeigt sich auch, daß im Falle einer nachträglichen Einführung von Ausschnitten in eine bereits berechnete Konstruktion das neue Verfahren viel schneller als die direkte Untersuchung des Systems mit Ausschnitten sein kann.

Wenn das Tragwerk ausschließlich von Kräften $\boldsymbol{R}$ beansprucht ist, können wir (43) in der Form

$$\boldsymbol{S}_a = \boldsymbol{b}_a \boldsymbol{R} \tag{44}$$

ansetzen, wo

$$\boldsymbol{b}_a = \boldsymbol{b} - \boldsymbol{b}_1 \boldsymbol{D}^{-1} \boldsymbol{b}'_{1h} [\boldsymbol{b}_{1h} \boldsymbol{D}^{-1} \boldsymbol{b}'_{1h}]^{-1} \boldsymbol{b}_h \tag{44a}$$

ist.

Das Verfahren erlaubt auch eine einfache Ableitung der Nachgiebigkeit $\boldsymbol{F}_a$ des ursprünglichen Systems, wenn die Nachgiebigkeit $\boldsymbol{F}$ des kontinuierlichen Systems bereits bekannt ist. Tatsächlich ergibt die Anwendung von (25a) und (36a) auf beide Tragwerke ($\boldsymbol{r}_a$ sind die Verschiebungen des ersteren Systems)

$$\boldsymbol{r}_a = \boldsymbol{F}_a \boldsymbol{R} = \boldsymbol{r} + \boldsymbol{b}'_h \boldsymbol{H} = \boldsymbol{F} \boldsymbol{R} + \boldsymbol{b}'_h [\boldsymbol{b}_{1h} \boldsymbol{D}^{-1} \boldsymbol{b}'_{1h}]^{-1} \boldsymbol{b}_h$$

oder

$$\boldsymbol{F}_a = \boldsymbol{F} + \Delta \boldsymbol{F} . \tag{45}$$

Hierin ist

$$\Delta \boldsymbol{F} = \boldsymbol{b}'_h [\boldsymbol{b}_{1h} \boldsymbol{D}^{-1} \boldsymbol{b}'_{1h}]^{-1} \boldsymbol{b}_h \tag{45a}$$

das Inkrement der Nachgiebigkeit infolge der Ausschnitte.

[1] Streng genommen müssen wir nur diejenigen Spannungen S in den Elementen h gleich Null setzen, die linear unabhängig sind. Sonst wird die obige Matrix singulär. Die Anzahl r der Zeilen ist damit gleich der Anzahl der linear unabhängigen S in den Elementen h.

Selbstverständlich bedeutet die Einführung von Elementen in Ausschnitten eine Erhöhung des Grades der statischen Unbestimmtheit des Systems; aber dies ist unbedeutend, wenn ein elektronischer Digitalautomat benutzt wird. Die Methode hat sich in der Praxis als sehr einfach und zeitersparend erwiesen.

Beispiel. Für das in Abb. 3a gezeigte Fachwerk soll die Spannungsmatrix $\boldsymbol{b}_a$ und die Nachgiebigkeit $\boldsymbol{F}$ für die Lasten R_1 und R_2 bestimmt werden, wenn der Stab *4* fehlt (siehe auch Abb. 8). Alle übrigen Stäbe sollen wieder die gleiche Nachgiebigkeit l/EA besitzen.

Das kontinuierliche Fachwerk mit dem eingesetzten Element h (4) ist in Abschnitt 4a) berechnet. Wir entnehmen den Gleichungen (27a) und (27b)

$$\boldsymbol{b}_{1h} = [0 \quad -1/\sqrt{2}] \quad \text{und} \quad \boldsymbol{b}_h = \frac{1}{55}[83 \quad 24]\,. \tag{46}$$

Unter Benutzung der in 4 a) bestimmten Matrix $\boldsymbol{D}^{-1}$ finden wir

$$[\boldsymbol{b}_{1h}\,\boldsymbol{D}^{-1}\,\boldsymbol{b}'_{1h}]^{-1} = \frac{55}{8}\,\frac{l}{EA}\,. \tag{47}$$

Abschließend ermitteln wir $\boldsymbol{b}_a$ und $\Delta\boldsymbol{F}$ aus (44a) und (46a):

$$\boldsymbol{b}_a = \frac{1}{55}\begin{array}{c} \begin{matrix} R_1 & R_2 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} -20.625 & 0 \\ -165.0 & -55 \\ 34.375 & 0 \\ 0 & 0 \\ 34.375 & 0 \\ -75.675 & 0 \\ 20.675\cdot\sqrt{2} & 0 \\ 110.\sqrt{2} & 55\sqrt{2} \\ -34.375\cdot\sqrt{2} & 0 \\ 55.\sqrt{2} & 0 \end{bmatrix} \end{array} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \\ 10 \end{matrix}$$

$$\Delta\boldsymbol{F} = \frac{l}{55\,EA}\begin{bmatrix} 861 & 249 \\ 249 & 72 \end{bmatrix} \tag{48}$$

Die Nachgiebigkeit $\boldsymbol{F}_a$ ergibt sich aus (45) unter Benutzung von (30a) für $\boldsymbol{F}$.

Selbstverständlich ist die direkte Untersuchung des einfach unbestimmten Fachwerks von Abb. 8 trivial einfach. Die obige Berechnung ist auch nur als eine Erläuterung des Verfahrens zu verstehen.

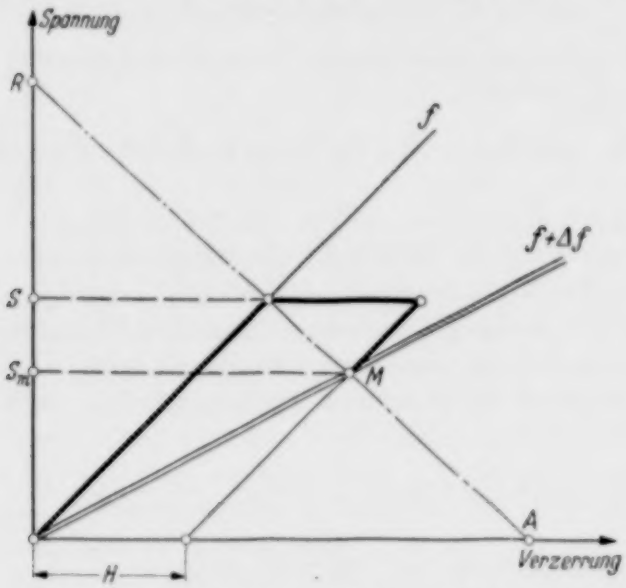


Abb. 10a. Berechnung eines modifizierten Systems nach dem Kraftverfahren.

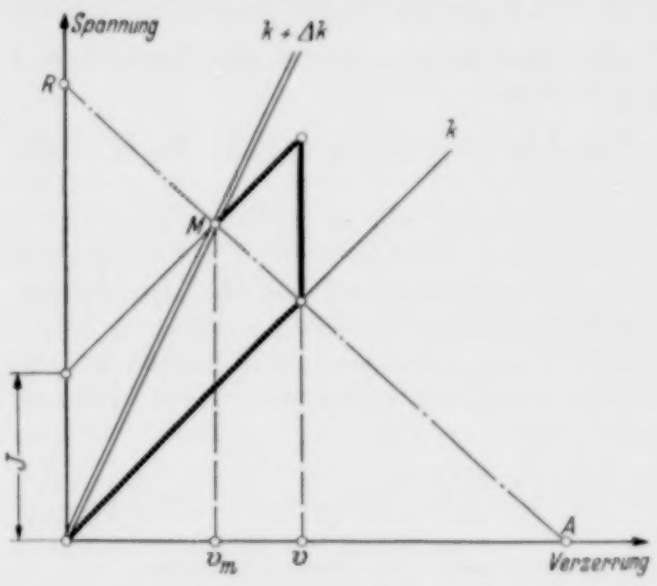


Abb. 10b. Berechnung eines modifizierten Systems nach dem Deformationsverfahren.

6. Die Berechnung von modifizierten Systemen. Wir verallgemeinern nun die Methode von Abschnitt **5** auf die Berechnung von modifizierten Tragwerken. Unter einem modifizierten Tragwerk verstehen wir ein System, das aus einem ursprünglichen System durch Abänderung der Nachgiebigkeit oder Steifigkeit einzelner Elemente erhalten wird. Wir behandeln hier folgendes Problem. Unter der Annahme, daß die Spannungsverteilung in einem Tragwerk infolge einer gegebenen Beanspruchung schon ermittelt worden ist, sollen die Spannungen bestimmt werden, wenn einzelne Elemente nachträglich modifiziert werden. Die Lösung dieses Problems nach dem Kraftverfahren erfolgt ähnlich wie in Abschnitt **5**. Demnach werden den zu modifizierenden Elementen derartige

Anfangsverzerrungen $\boldsymbol{H}$ eingeprägt, daß die gesamten Verzerrungen infolge der gegebenen Beanspruchung und der $\boldsymbol{H}$ die gleichen wie im modifizierten System unter der gegebenen Beanspruchung allein sind. Diese Bedingung führt wie im Falle der Ausschnitte auf eine sehr einfache Matrizenformulierung der Spannungen im modifizierten System abhängig von der bekannten Spannungsverteilung im ursprünglichen System. Im folgenden wird auch das Deformationsverfahren auf das gleiche Problem angewandt, und die Abb. 10a und 10b erläutern das physikalische Prinzip der Lösung nach den beiden dualen Verfahren. Die mathematische Entwicklung bestätigt, daß die Methode von Abschnitt **5** nur ein Spezialfall der neuen Methode ist.

Wir nehmen an, daß das ursprüngliche System $g + h$ Elemente hat, von denen h nachträglich modifiziert werden. Der Index m bezeichnet Größen im modifizierten System.

Das Kraftverfahren

Die Nachgiebigkeit der unverbundenen Elemente ist

$$\boldsymbol{f} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{f}_g & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{f}_h \end{bmatrix} \tag{49a}$$

im ursprünglichen System und wird

$$\boldsymbol{f}_m = \begin{bmatrix} \boldsymbol{f}_g & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{f}_h + \Delta\boldsymbol{f}_h \end{bmatrix} \tag{50a}$$

im modifizierten Tragwerk.

Das Deformationsverfahren

Die Steifigkeit der unverbundenen Elemente ist

$$\boldsymbol{k} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{k}_g & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{k}_h \end{bmatrix} \tag{49b}$$

im ursprünglichen System und wird

$$\boldsymbol{k}_m = \begin{bmatrix} \boldsymbol{k}_g & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{k}_h + \Delta\boldsymbol{k}_h \end{bmatrix} \tag{50b}$$

im modifizierten Tragwerk.

Die statische Untersuchung des ursprünglichen Systems

Die bekannten Spannungen im ursprünglichen System infolge der gegebenen Beanspruchung seien mit $\boldsymbol{S}$ bezeichnet. Zusätzlich wirken noch die Anfangsverzerrungen $\boldsymbol{H}$ auf die unverbundenen Elemente h. Die Gesamtspannungen berechnen sich aus Problem I und III zu [siehe auch (41)]

$$\boldsymbol{S}_m = \boldsymbol{S} - \boldsymbol{b}_1 \boldsymbol{D}^{-1} \boldsymbol{b}'_{1h} \boldsymbol{H} \,. \tag{51a}$$

Die Gesamtverzerrungen in den Elementen h sind demnach

$$\boldsymbol{v}_h = \boldsymbol{f}_h \boldsymbol{S}_{mh} + \boldsymbol{H} = \boldsymbol{f}_h [\boldsymbol{S}_h - \boldsymbol{b}_{1h} \boldsymbol{D}^{-1} \boldsymbol{b}'_{1h} \boldsymbol{H}] + \boldsymbol{H} \,. \tag{52a}$$

Die bekannten Verzerrungen im ursprünglichen System infolge der gegebenen Beanspruchung seien mit $\boldsymbol{v}$ bezeichnet. Zusätzlich wirken noch die Zwangsspannungen $\boldsymbol{J}$ auf die Elemente h mit festgehaltenen Knotenpunkten. Die Gesamtverzerrungen berechnen sich aus Problem I und III zu

$$\boldsymbol{v}_m = \boldsymbol{v} - \boldsymbol{a}_1 \boldsymbol{C}^{-1} \boldsymbol{a}'_{1h} \boldsymbol{J} \,. \tag{51b}$$

Die Gesamtspannungen in den Elementen h sind demnach

$$\boldsymbol{S}_h = \boldsymbol{k}_h \boldsymbol{v}_{mh} + \boldsymbol{J} = \boldsymbol{k}_h [\boldsymbol{v}_h - \boldsymbol{a}_{1h} \boldsymbol{C}^{-1} \boldsymbol{a}'_{1h} \boldsymbol{J}] + \boldsymbol{J} \,. \tag{52b}$$

Die statische Untersuchung des modifizierten Systems

Da wir vorschreiben, daß die Spannungen und Verzerrungen in den modifizierten Elementen h unter der gegebenen Beanspruchung allein identisch mit (51a) bzw. (52a) sein sollen, ergibt sich

$$\boldsymbol{v}_{mh} = [\boldsymbol{f}_h + \Delta\boldsymbol{f}_h] \, [\boldsymbol{S}_h - \boldsymbol{b}_{h1h} \boldsymbol{D}^{-1} \boldsymbol{b}'_{1h} \boldsymbol{H}] = \boldsymbol{v}_h \,. \tag{53a}$$

Unter Benutzung von (52a) folgt dann

$$\boldsymbol{H} = \boldsymbol{P}^{-1} \boldsymbol{S}_h \,, \tag{54a}$$

wo

$$\boldsymbol{P} = [\boldsymbol{b}_{1h} \boldsymbol{D}^{-1} \boldsymbol{b}'_{1h} + \Delta\boldsymbol{f}_h^{-1}] \tag{55a}$$

ist. Man beachte, daß die Anzahl der Zeilen der Matrix $\boldsymbol{P}$ gleich der Anzahl der Spannungen S in den h Elementen ist (vgl. S. 188). Durch Einsetzen von (54a) in (51a) erhalten wir

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{S}_m &= \boldsymbol{S} - \boldsymbol{b}_1 \boldsymbol{D}^{-1} \boldsymbol{b}'_{1h} \boldsymbol{P}^{-1} \boldsymbol{S}_h \,, \\ \boldsymbol{v}_m &= \boldsymbol{f}_m \boldsymbol{S}_m \,. \end{aligned}\right\} \tag{56a}$$

Da wir vorschreiben, daß die Verzerrungen und Spannungen in den modifizierten Elementen h unter der gegebenen Beanspruchung allein identisch mit (51b) bzw. (52b) sein sollen, ergibt sich

$$\boldsymbol{S}_{mh} = [\boldsymbol{k}_h + \Delta\boldsymbol{k}_h] \, [\boldsymbol{v}_h - \boldsymbol{a}_{1h} \boldsymbol{C}^{-1} \boldsymbol{a}'_{1h} \boldsymbol{J}] = \boldsymbol{S}_h \,. \tag{53b}$$

Unter Benutzung von (52b) folgt dann

$$\boldsymbol{J} = \boldsymbol{Q}^{-1} \boldsymbol{v}_h \,, \tag{54b}$$

wo

$$\boldsymbol{Q} = [\boldsymbol{a}_{1h} \boldsymbol{C}^{-1} \boldsymbol{a}'_{1h} + \Delta\boldsymbol{k}_h^{-1}] \tag{55b}$$

ist. Man beachte, daß die Anzahl der Zeilen der Matrix $\boldsymbol{Q}$ gleich der Anzahl der Verzerrungen v in den h Elementen ist. Durch Einsetzen von (54b) in (51b) erhalten wir

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{v}_m &= \boldsymbol{v} - \boldsymbol{a}_1 \boldsymbol{C}^{-1} \boldsymbol{a}'_{1h} \boldsymbol{Q}^{-1} \boldsymbol{v}_h \,, \\ \boldsymbol{S}_m &= \boldsymbol{k}_m \boldsymbol{v}_m \,. \end{aligned}\right\} \tag{56b}$$

Damit sind die Spannungen und Verzerrungen des modifizierten Systems lediglich durch die Spannungsverteilung im ursprünglichen System ausgedrückt.

Wenn die Spannungen $\boldsymbol{S}$ nur von Lasten $\boldsymbol{R}$ herrühren ($\boldsymbol{S} = \boldsymbol{b}\,\boldsymbol{R}$), wird die modifizierte Matrix $\boldsymbol{b}_m$ ($\boldsymbol{S}_m = \boldsymbol{b}_m\,\boldsymbol{R}$)

$$\boldsymbol{b}_m = \boldsymbol{b} - \boldsymbol{b}_1\,\boldsymbol{D}^{-1}\,\boldsymbol{b}'_{1h}\,\boldsymbol{P}^{-1}\,\boldsymbol{b}_h\,. \qquad (57a)$$

Damit sind die Verzerrungen und Spannungen des modifizierten Systems lediglich durch die Verzerrungsverteilung im ursprünglichen System ausgedrückt.

Wenn die Verzerrungen $\boldsymbol{v}$ nur von Verschiebungen $\boldsymbol{r}$ herrühren ($\boldsymbol{v} = \boldsymbol{a}\,\boldsymbol{r}$), wird die modifizierte Matrix $\boldsymbol{a}_m$ ($\boldsymbol{v}_m = \boldsymbol{a}_m\,\boldsymbol{r}$)

$$\boldsymbol{a}_m = \boldsymbol{a} - \boldsymbol{a}_1\,\boldsymbol{C}^{-1}\,\boldsymbol{a}'_{1h}\,\boldsymbol{Q}^{-1}\,\boldsymbol{a}_h\,. \qquad (57b)$$

Nachgiebigkeit des modifizierten Systems

Die Anwendung von (25a) und (36a) auf das ursprüngliche und modifizierte System unter der Belastung $\boldsymbol{R}$ ergibt

$$\boldsymbol{F}_m = \boldsymbol{F} + \Delta\boldsymbol{F}\,, \qquad (58a)$$

$$\Delta\boldsymbol{F} = \boldsymbol{b}'_h\,\boldsymbol{P}^{-1}\,\boldsymbol{b}_h\,. \qquad (59a)$$

$\Delta\boldsymbol{F}$ ist das Inkrement (positiv oder negativ) der Nachgiebigkeit infolge der Modifizierungen.

Die Anwendung von (25b) und (36b) auf das ursprüngliche und modifizierte System unter der Verschiebung $\boldsymbol{r}$ ergibt

$$\boldsymbol{K}_m = \boldsymbol{K} + \Delta\boldsymbol{K}\,, \qquad (58b)$$

$$\Delta\boldsymbol{K} = \boldsymbol{a}'_h\,\boldsymbol{Q}^{-1}\,\boldsymbol{a}_h\,. \qquad (59b)$$

$\Delta\boldsymbol{K}$ ist das Inkrement (positiv oder negativ) der Steifigkeit infolge der Modifizierungen.

Spezialfälle

1) Elimination der h Elemente (Ausschnitte): Es ist

$$\Delta\boldsymbol{f}_h \to \infty \quad \text{und} \quad \boldsymbol{P} = \boldsymbol{b}_{1h}\,\boldsymbol{D}^{-1}\,\boldsymbol{b}'_{1h}\,. \qquad (60a)$$

Dieser Fall ist in Abschnitt 5 behandelt und entspricht Punkt A in Abb. 9a.

2) Verstarrung der h Elemente: Es ist

$$\Delta\boldsymbol{f}_h = -\boldsymbol{f}_h \quad \text{und} \quad \boldsymbol{P} = \boldsymbol{b}_{1h}\,\boldsymbol{D}^{-1}\,\boldsymbol{b}'_{1h} - \boldsymbol{f}_h^{-1}\,. \qquad (61a)$$

Dieser Fall entspricht Punkt R in Abb. 9a.

Beispiel. Für das in Abb. 3a gezeigte Fachwerk soll die Spannungsmatrix $\boldsymbol{b}_m$ und die Nachgiebigkeit $\boldsymbol{F}_m$ für die Lasten R_1 und R_2 bestimmt werden. Die Nachgiebigkeit des Stabes 10 ist $l/6\,EA$, aber die aller übrigen Stäbe ist weiterhin l/EA. Wir betrachten das in 4 a) berechnete Fachwerk mit gleichen Nachgiebigkeiten für die Stäbe als das ursprüngliche System, dessen Stab *10* nachträglich modifiziert ist. Wir erhalten aus (27a) und (29a)

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{b}_{1h} &= [0\ \ 1]\,, \\ \boldsymbol{b}_h &= \frac{1}{55}\,[-28\sqrt{2} - 24\sqrt{2}]\,. \\ \Delta\boldsymbol{f}_h &= \frac{l}{6\,EA} - \frac{l}{EA} = -\frac{5}{6}\,\frac{l}{EA} \end{aligned}\right\} \qquad (62a)$$

Unter Benutzung der in 4 a) bestimmten Matrix $\boldsymbol{D}^{-1}$ finden wir

$$\boldsymbol{P}^{-1} = -\frac{55}{50}\,\frac{l}{EA} \qquad (63a)$$

1) Verstarrung der h Elemente: Es ist

$$\Delta\boldsymbol{k}_h \to \infty \quad \text{und} \quad \boldsymbol{Q} = \boldsymbol{a}_{1h}\,\boldsymbol{C}^{-1}\,\boldsymbol{a}'_{1h}\,. \qquad (60b)$$

Dieser Fall ist dual zu der Methode des Abschnittes 5 und entspricht Punkt R in Abb. 9b.

2) Elimination der h Elemente: Es ist

$$\Delta\boldsymbol{k}_h = -\boldsymbol{k}_h \quad \text{und} \quad \boldsymbol{Q} = \boldsymbol{a}_{1h}\,\boldsymbol{C}^{-1}\,\boldsymbol{a}'_{1h} - \boldsymbol{k}_h^{-1}\,. \qquad (61b)$$

Dieser Fall entspricht Punkt A in Abb. 9b.

Beispiel. Für das in Abb. 3b gezeigte Fachwerk soll die Verzerrungsmatrix $\boldsymbol{a}_m$ und die Steifigkeit $\boldsymbol{K}_m$ für die Verschiebungen r_1 und r_2 bestimmt werden. Die Steifigkeit des Stabes *10* ist $6\,EA/l$, aber die aller übrigen Stäbe ist weiterhin EA/l. Wir betrachten das in 4 a) berechnete Fachwerk mit gleichen Steifigkeiten für die Stäbe als das ursprüngliche System, dessen Stab *10* nachträglich modifiziert ist. Wir erhalten aus (27b) und (29b)

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{a}_{1h} &= [0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 1/\sqrt{2}\ \ 0\ \ -1/\sqrt{2}]\,, \\ \boldsymbol{a}_h &= \frac{1}{335}\,[12\sqrt{2} - 104\sqrt{2}]\,. \\ \Delta\boldsymbol{k}_h &= \frac{6\,EA}{l} - \frac{EA}{l} = 5\,\frac{EA}{l} \end{aligned}\right\} \qquad (62b)$$

Unter Benutzung der in 4 b) bestimmten Matrix $\boldsymbol{C}^{-1}$ finden wir

$$\boldsymbol{Q}^{-1} = \frac{335}{226}\,\frac{EA}{l} \qquad (63b)$$

und damit,

$$\boldsymbol{b}_m = \frac{1}{55}\begin{array}{c} \begin{matrix} R_1 & R_2 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} -32.12 & -3.96 \\ -73.04 & -23.32 \\ 22.88 & -3.96 \\ 91.96 & 31.68 \\ 22.88 & -3.96 \\ 4.84 & 27.72 \\ 32.12\sqrt{2} & 3.96\sqrt{2} \\ 18.04\sqrt{2} & 23.32\sqrt{2} \\ -22.88\sqrt{2} & 3.96\sqrt{2} \\ -36.96\sqrt{2} & -31.68\sqrt{2} \end{bmatrix} \end{array} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \\ 10 \end{matrix}$$

$$\Delta \boldsymbol{F} = -\frac{l}{55\,E\,A}\begin{bmatrix} 31.4 & 26.9 \\ 26.9 & 23.1 \end{bmatrix} \qquad (64\,\text{a})$$

Wir ermitteln $\boldsymbol{F}_m$ aus (58a).

und damit,

$$\boldsymbol{a}_m = \frac{1}{335}\begin{array}{c} \begin{matrix} r_1 & r_2 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} -44.47 & 50.40 \\ -62.85 & -13.64 \\ 49.81 & -96.65 \\ 72.93 & 37.95 \\ 49.81 & -96.65 \\ -65.81 & 235.39 \\ 44.47\sqrt{2} & -50.40\sqrt{2} \\ -31.42\sqrt{2} & 160.68\sqrt{2} \\ -49.81\sqrt{2} & 96.65\sqrt{2} \\ 3.56\sqrt{2} & -30.83\sqrt{2} \end{bmatrix} \end{array} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \\ 10 \end{matrix}$$

$$\Delta \boldsymbol{K} = \frac{E\,A}{335\,l}\begin{bmatrix} 1.3 & -11.1 \\ -11.1 & 95.8 \end{bmatrix} \qquad (64\,\text{b})$$

Wir ermitteln $\boldsymbol{K}_m$ aus (58b).

Wir bestätigen wieder, daß $\boldsymbol{b}_m' \boldsymbol{a}_m = \boldsymbol{E}_2$ erfüllt ist.

Der Einfluß der erhöhten Steifigkeit des Stabes *10* auf die Spannungsverteilung ist, wie zu erwarten, verhältnismäßig gering.

(Eingegangen am 4. August 1956)

Anschrift des Verfassers: Professor *J. H. Argyris* D. E., London S. W. 7, Prince Consort Road, Imperial College of Science and Technology (University of London).

Diagonalwinkel-Zuordnungen im Gelenkviereck

Von **K. Hain**

1. Einleitung. Winkelzuordnungen im Gelenkviereck und in mehrgliedrigen Getrieben sind ein wichtiges Aufgabengebiet der Getriebesynthese. Es handelt sich dabei im allgemeinen darum, die Veränderungen eines Winkels im Gelenkviereck den vorgeschriebenen Änderungen eines anderen Winkels zuzuordnen. Auf diese Weise ist es möglich, gegebene Funktionen mechanisch mit Hilfe eines Getriebes darzustellen. Außerdem bilden Winkelzuordnungen eine wichtige Grundlage für viele andere getriebetechnische Aufgaben.

Bisher hat man sich jedoch darauf beschränkt, die Getriebesynthese bezüglich der Winkelzuordnungen insofern auszubauen, als man Winkel im Gelenkviereck bzw. Winkel in vielgliedrigen Getrieben einander zugeordnet hat, die zwischen drei benachbarten Getriebegliedern lagen. Auf dieser Grundlage sind viele Untersuchungen entstanden.

Neben den bekannten Verfahren für Winkelzuordnungen stellt die Zuordnung von Diagonalwinkeln im Gelenkviereck eine neuartige Aufgabe dar, da es sich hier um zugeordnete Winkel handelt, die von paarweise verschiedenen Getriebegliedern eingeschlossen werden. Einen umfassenden Überblick über die Synthese des Gelenkvierecks hat *R. Kraus* gegeben[1]. Auf die Zuordnung von Diagonalwinkeln ist er jedoch dabei nicht eingegangen. Daß eine solche Synthese auch einen praktischen Wert hat, kann an Hand von verschiedenen Nutzanwendungen gezeigt werden. So hat z. B. *G. Kiper* an einer Schneidvorrichtung beschrieben, wie durch eine weitgehende Ausnutzung des Gelenkvierecks dieses in der Lage ist, ein vielgliedriges Getriebe vollwertig zu ersetzen[2]. Weitere Beispiele können u. a. aus dem Hebezeugbau angeführt werden, wenn zwischen bewegten Getriebegliedern ein ölhydraulischer Zylinder mit Kolben zur Bewegungseinleitung in das gesamte Getriebe dient und ein Drehmoment um einen festen Gestellpunkt zu überwinden ist.

2. Übersetzungsverhältnis bei Diagonalwinkel-Drehungen. Das Gelenkviereck von Abb. 1 besteht aus Gestell *1* und den drei bewegten Hebeln *2*, *3* und *4*. Laut Aufgabenstellung sollen die Veränderungen des Winkels ψ den Veränderungen des ihm diagonal gegenüberliegenden Winkels β zugeordnet werden. Sämtliche Abmessungen des Gelenkvierecks sind dieser Forderung entsprechend auszubilden. Bei Ansprüchen, die die Möglichkeiten des Gelenkvierecks nicht voll ausschöpfen, kann man sich bestimmte Maße vorgeben, wie im folgenden gezeigt werden soll.

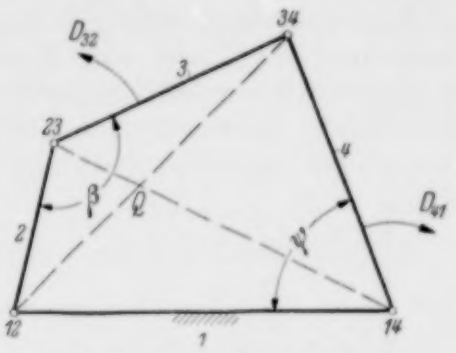


Abb. 1. Gelenkviereck mit gegensinnig verlaufenden Diagonaldrehungen D_{41} und D_{32}.

Die Gelenkpunkte *12*, *23*, *34*, *14* des Gelenkvierecks sind durch die Doppelziffern der in einem solchen Gelenk vereinigten benachbarten Getriebeglieder gekennzeichnet. Zwischen den Relativdrehungen der Getriebeglieder *1* und *4* um das Gelenk *14* und den Relativdrehungen der Getriebeglieder *2* und *3* um das Gelenk *23* läßt sich das Übersetzungsverhältnis durch Strecken ausdrücken[3]. Bezeichnet man mit D_{41} die Drehungen des Gliedes *4* relativ zum Glied *1* und mit D_{32} die Drehungen des Gliedes *3* relativ zum Glied *2*, so sind damit auch die Drehrichtungen festgelegt. Schreibt man

$$\left.\begin{matrix} D_{41} \\ D_{32} \end{matrix}\right| \quad 12—34$$

so ergibt sich durch die vertikale Zuordnung der Fußzeichenziffern eine sogenannte *K*-Achse *12—34*. Diese Achse wird in Abb. 1 von der Achse *14—23* im Punkt *Q* geschnitten, wobei die Ziffern der letzteren Achse die Gelenke bezeichnen, um die die Drehungen *D* stattfinden. Liegt der Punkt *Q* zwischen den durch die Drehungen *D* gekennzeichneten Gelenken *14* und *23*, so müssen die Drehungen D_{41} und D_{32} entgegengesetzten Drehsinn haben. Die Drehung D_{41} erfolgt z. B. im Uhr-

[1] *R. Kraus*, Mitt. Techn. Inst. Tung-Chi-Universität Woosung, Bd. 2 (1935).

[2] *G. Kiper*, Die Bedeutung der Relativbewegungen für das Konstruieren periodischer Getriebe, VDI-Bericht Bd. 5, Düsseldorf 1955 (Vorträge der VDI-Tagung Stuttgart 1953, S. 115/117).

[3] *K. Hain*, Landtechn. Forschung 3 (1953), S. 97.

zeigersinne, die Drehung D_{32}, also die Bewegung des Gliedes *3* gegenüber dem Glied *2*, muß dann im Gegenuhrzeigersinne stattfinden[1]. Man kann auch eine andere Anordnung der Fußzeichenziffern für die Drehungen D wählen und würde dann eine entsprechend andere vertikale Zuordnung dieser Ziffern erhalten. Im folgenden sollen jedoch immer mit dem Winkel ψ die Drehung D_{41} und mit dem Winkel β die Drehung D_{32} bezeichnet werden.

Das Gegenstück zu Abb. 1 zeigt Abb. 2, insofern als der Punkt Q außerhalb der Gelenke *14* und *23* liegt. Mit dieser Lage ist aber auch eine gleichsinnige Drehung des Gliedes *4* um *1* und des Gliedes *3* um *2* verbunden. In Abb. 2 verlaufen beide Drehungen D_{41} und D_{32} um die Gelenkpunkte *14* und *23* im Uhrzeigersinne.

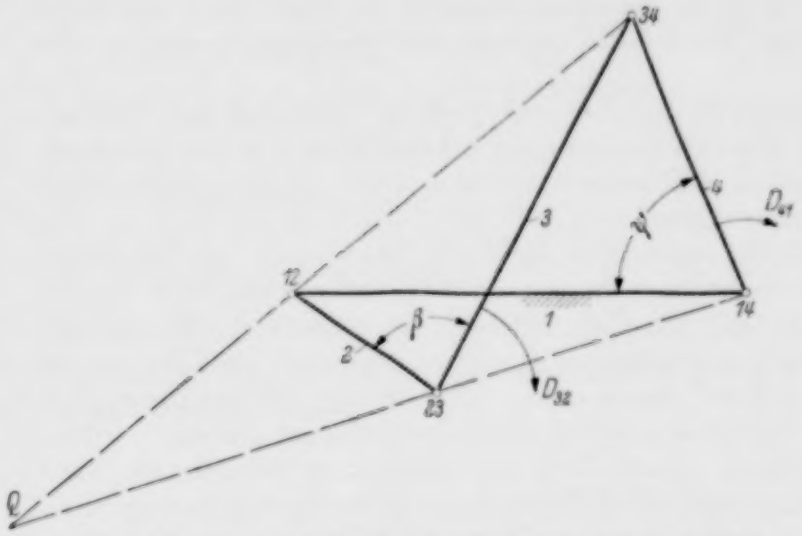


Abb. 2. Gelenkviereck mit gleichsinnig verlaufenden Diagonaldrehungen D_{41} und D_{32}

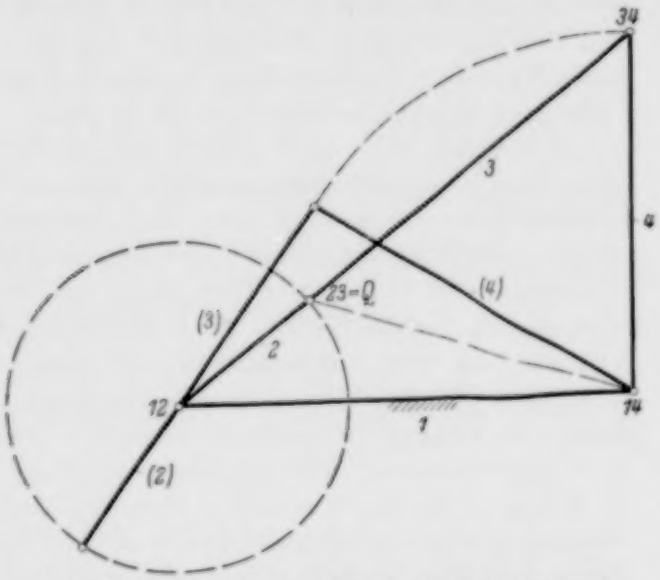


Abb. 3. Getriebetotlagen bei Zuordnungen von Diagonaldrehungen. Grenzlagenstellungen zwischen den Gliedern *1* und *4*.

3. Totlagenstellungen bei Zuordnungen von Diagonaldrehungen im Gelenkviereck. Nach den vorangegangenen Ausführungen soll die Bewegungseinleitung entweder im Gelenk *23* oder im Gelenk *14* und die Ableitung der Bewegung im jeweils anderen Gelenk stattfinden. Es ist bekannt, daß es Getriebestellungen gibt, bei denen eine Sperrung stattfindet, also eine Bewegungseinleitung an einer bestimmten Stelle nicht mehr möglich ist. Solche Sperrstellungen gibt es auch bei der Zuordnung von Diagonalwinkel-Drehungen. In

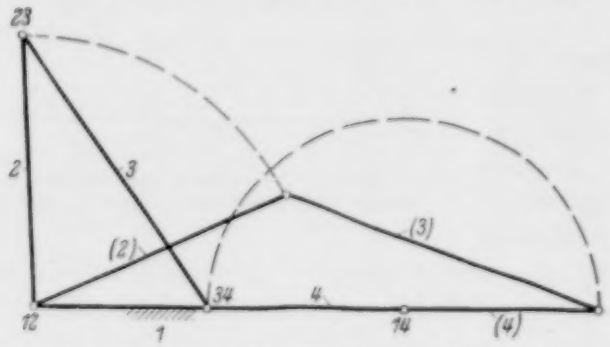


Abb. 4. Getriebetotlagen bei Zuordnungen von Diagonaldrehungen. Grenzlagenstellungen zwischen den Gliedern *2* und *3*.

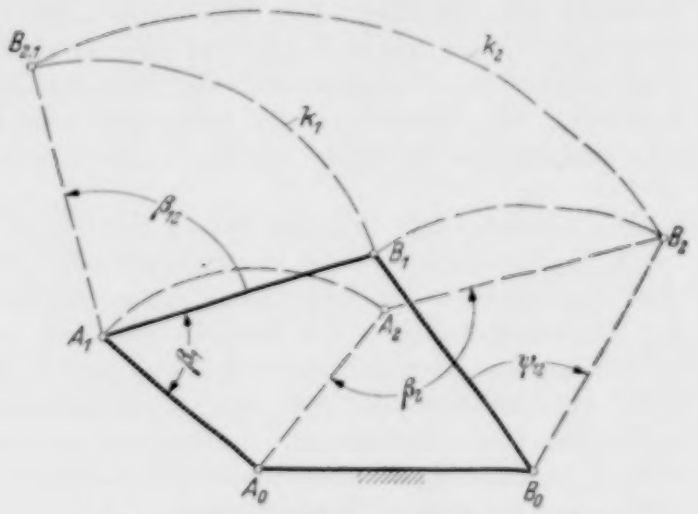


Abb. 5. Zuordnungen der Diagonalwinkel γ_{12} und β_{12} für zwei Getriebelagen.

Abb. 3 bilden die Glieder *2* und *3* eine Strecklage, so daß das Glied *4* gegenüber dem Glied *1* seine Bewegungen umkehrt. Damit ist es aber auch nicht möglich, am Glied *4* eine Bewegung einzuleiten. Eine zweite solche Stellung ist durch die Lage *1* (*2*) (*3*) (*4*) gekennzeichnet. Auch hier liegen die Glieder (*3*) und (*2*) auf einer Geraden. Durch die Lagen (*4*) und *4* ist für das gegebene Gelenkviereck auch der gesamte Schwingbereich des Gliedes *4* gekennzeichnet.

---

[1] Es sei darauf hingewiesen, daß die Ziffernfolge bei der Bezeichnung der Gelenke ohne Bedeutung ist. Sie wurde hier so gewählt, daß die kleinere Ziffer immer an erster Stelle steht. Bei den Drehungen D jedoch wurde der Ziffernfolge insofern eine Bedeutung gegeben als D_{41} die Bewegungen des Gliedes *4* gegenüber dem Glied *1* und D_{32} diejenigen des Gliedes *3* gegenüber dem Glied *2* kennzeichnen.

Die Drehung D_{14} würde also entgegengesetzt zu D_{41} und die Drehung D_{23} entgegengesetzt zu D_{32} sein.

In Abb. 4 sind die beiden Getriebestellungen des Gelenkvierecks eingezeichnet, in denen das Glied *4* in den Getriebelagen *4* und (*4*) mit dem Gestell *1* zur Deckung kommt. Dadurch befinden sich die Glieder *2* und *3* bzw. (*2*) und (*3*) in je einer Grenzlage, und in beiden Lagen findet eine Bewegungsumkehr der Relativbewegung beider Glieder statt. Eine Bewegungseinleitung durch eine Drehung um das Gelenk *23* ist in beiden Getriebestellungen unmöglich.

4. Diagonalwinkel-Zuordnungen bei gegebenen Gestellgelenkpunkten. Wenn nach Abb. 5 ein Gelenkviereck sich von seiner Lage $A_0A_1B_1B_0$ in eine zweite Lage $A_0A_2B_2B_0$ bewegt hat, hat das Glied B_0B (in Abb. 1 bis 4 Glied *4*) gegenüber dem Gestell A_0B_0 (früher Glied *1*) den Winkel ψ_{12} durchlaufen. Das Glied AB (früher Glied *3*) schließt mit dem Glied A_0A (früher Glied *2*) in der

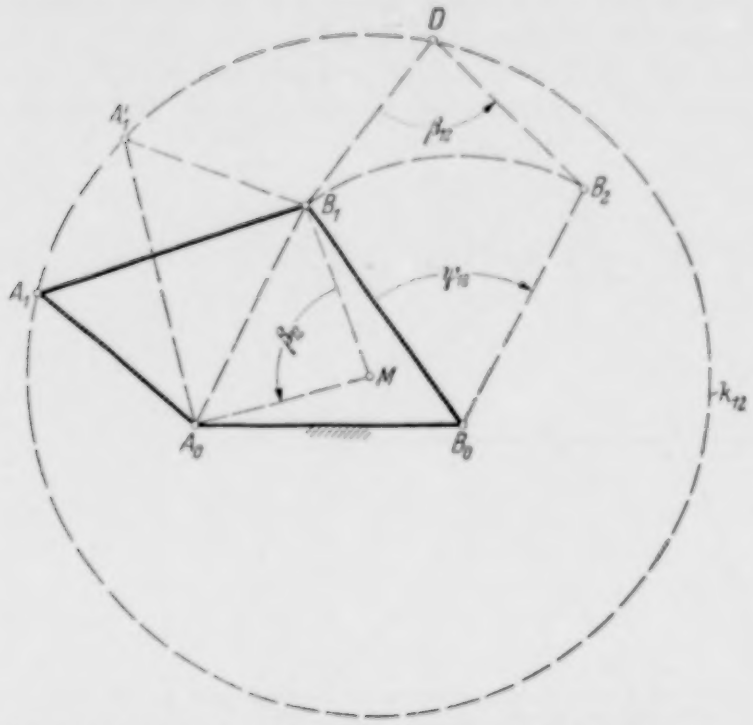


Abb. 6. Konstruktion des Kreises k_{12} als geometrischer Ort für alle Punkte A_1 bei Zuordnung der Diagonalwinkel ψ_{12} und β_{12}. Gegensinnige Drehrichtung von ψ_{12} und β_{12}

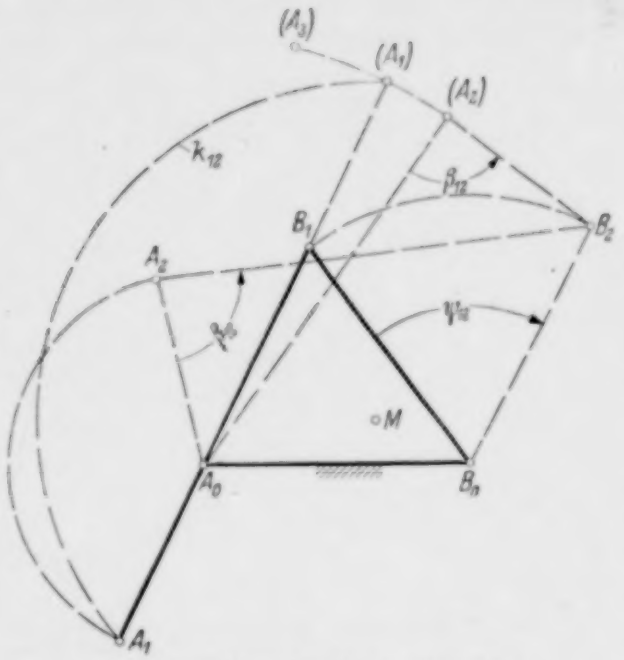


Abb. 7. Brauchbarer Bereich des Kreises k_{12} von Abb. 6.

Lage *1* den Winkel β_1 und in der Lage *2* den Winkel β_2 ein. Die Veränderung dieses Winkels ist damit

$$\beta_{12} = \beta_2 - \beta_1 .$$

Den Winkel β_{12} findet man sehr leicht, wenn man beispielsweise in der Getriebestellung *1* um den Punkt A_1 den Kreis k_1 durch B_1 zeichnet und diesen zum Schnitt $B_{2.1}$ mit dem Kreis k_2 bringt, den man um A_0 durch B_2 zeichnet. Dann ist

$$\beta_{12} = \sphericalangle\, B_{2.1}A_1B_1 .$$

Diese Konstruktion des Winkels β_{12} liegt allen folgenden Verfahren zugrunde.

Ist in einem Gelenkviereck der Winkel β_{12} dem Winkel ψ_{12} zuzuordnen, wobei auch deren Richtungen vorgegeben sein sollen, so kann man, da durch diese Forderung die Möglichkeiten des Gelenkvierecks noch nicht voll ausgeschöpft sind, noch verschiedene Annahmen treffen. So gibt man sich nach Abb. 6 beispielsweise die Lage der beiden Gestellpunkte B_0 und A_0 sowie die Länge des Gliedes B_0B und dessen Anfangslage B_0B_1 relativ zum Gestell A_0B_0 vor. Mit dem gegebenen Winkel ψ_{12} kann man nun die Lagen B_0B_1 und B_0B_2 des Gliedes B_0B zeichnen. Über der Strecke B_1B_2 zeichnet man das gleichschenklige Dreieck mit dem Spitzenwinkel β_{12} und den Spitzenpunkt D, wobei die gegebene Richtung von β_{12} insofern erfüllt sein muß, als der Schenkel DB_1 in der durch β_{12} gekennzeichneten Richtung nach DB_2 drehen muß. Weiterhin zeichnet man über der Strecke B_1A_0 ebenfalls ein gleichschenkliges Dreieck mit dem Spitzenwinkel β_{12} und dem Spitzenpunkt M. Auch hier muß die gegebene Richtung von β_{12} insofern erfüllt sein, als der Strahl MB_1 nach MA_0 wandert. Zeichnet man nunmehr um den Punkt M den Kreis k_{12} durch den Punkt D, so ist dieser Kreis der geometrische Ort aller Punkte A_1 für die gegebenen Winkel ψ_{12} und β_{12} sowie für die angenommenen weiteren Getriebedaten. Es erfüllt also z. B. sowohl das Gelenkviereck $A_0A_1B_1B_0$ als auch jedes andere beliebige Gelenkviereck $A_0A_1B_1'B_0$ mit dem Punkt A_1 bzw. A_1' auf dem Kreis k_{12} die gestellten Bedingungen.

Entsprechend Abb. 6 ist der Kreis k_{12} der geometrische Ort für alle Gelenkpunktlagen A_1. Stellt man die Forderungen, daß ein stetiger Verlauf der Winkel ψ und β während des vorgegebenen Bewegungsbereichs vorhanden ist, daß also zwischen den vorgegebenen Lagen keine Bewegungsumkehr stattfindet, so ist hierfür nur ein bestimmter Bereich des Kreises k_{12} als brauchbar zu bezeichnen. Bei gegebenem Richtungssinn der Winkel ψ_{12} und β_{12} muß ein Punkt Q entsprechend Abb. 1 konstruierbar sein, so daß, wie in Abb. 7 gezeigt, nur der Kreisbogen des Kreises k_{12} zwischen

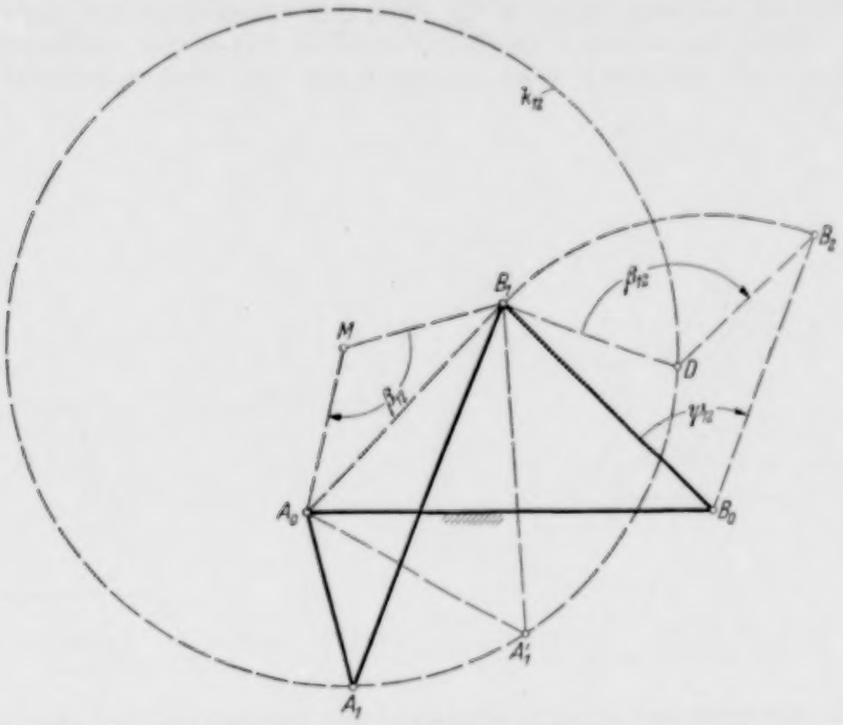


Abb. 8. Konstruktion des Kreises k_{12} als geometrischer Ort für alle Punkte A_1 bei Zuordnung der Diagonalwinkel ψ_{12} und β_{12}. Gleichsinnige Drehrichtung von ψ_{12} und β_{12}

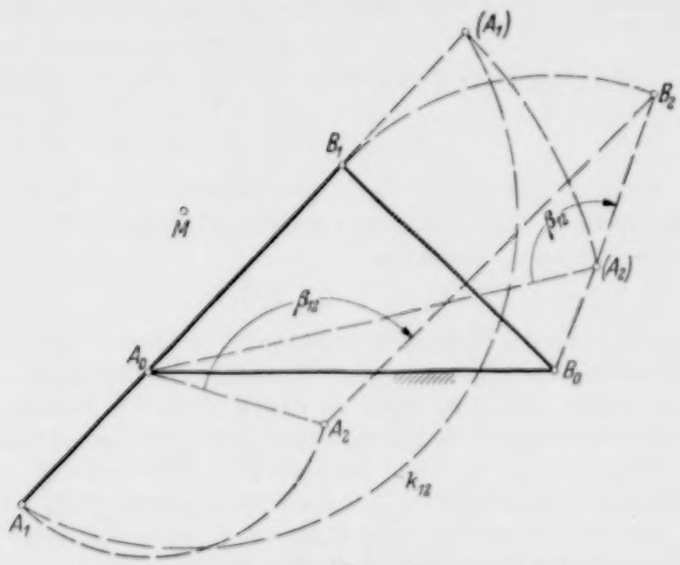


Abb. 9. Brauchbarer Bereich des Kreises k_{12} von Abb. 8.

den Punkten A_1 und (A_1) brauchbar ist, wenn die hierdurch gekennzeichneten Getriebelagen den Totlagen der Abb. 3 entsprechen. Selbstverständlich würden auch Punkte A_1 außerhalb dieses Bereiches die gestellte Bedingung erfüllen, d. h. es würde sich das Glied B_0B um den Winkel ψ_{12} drehen; dazwischen könnte aber z. B. eine Lage dieses Gliedes eintreten, die außerhalb des durch den Kreisbogen $\widehat{B_1B_2}$ gekennzeichneten Bereiches liegt.

Die Abb. 8 und 9 entsprechen den Darstellungen der Abb. 6 und 7, wobei hier eine gleichsinnige Richtung, nämlich eine Drehung in Uhrzeigerrichtung der Winkel ψ_{12} und β_{12} angenommen

wurde. Nach Abb. 8 liegt dann der Punkt D als Spitzenpunkt des gleichschenkligen Dreiecks B_1DB_2 auf der konkaven Seite des Kreisbogens $\overset{\frown}{B_1B_2}$, während der Punkt M auf der anderen Seite der Strecke B_1A_0 wie in Abb. 6 liegen muß.

In Abb. 6 und 8 waren zu Beginn der Konstruktion noch verschiedene willkürliche Annahmen gegeben worden, die man insofern als Konstruktionsfreiheiten ausnutzen kann, als mehrere Winkel ψ der gleichen Anzahl Winkel β zugeordnet werden können. In Abb. 10 sind die Winkel ψ_{12} und ψ_{13} vorgeschrieben, denen die gegebenen Winkel β_{12} und β_{13} zuzuordnen sind. Für diese Forderungen kann man nach wie vor die Länge des Gliedes B_0B und seine Anfangslage B_0B_1 zum Gestell A_0B_0 beliebig annehmen. Damit ergeben sich die Lagen B_0B_1, B_0B_2 und B_0B_3 dieses Gliedes mit den eingeschlossenen gegebenenen Winkeln ψ_{12} und ψ_{13}. Über der Strecke B_1B_2 zeichnet man nach den Regeln der Abb. 6 das gleichschenklige Dreieck mit dem Spitzenwinkel β_{12} und dem Spitzenpunkt D_{12}, in der gleichen Weise über B_1B_3 das gleichschenklige Dreieck mit dem gegebenen Spitzenwinkel β_{13} und dem Spitzenpunkt D_{13}. Verbindet man B_1 mit A_0, so müssen auch über dieser

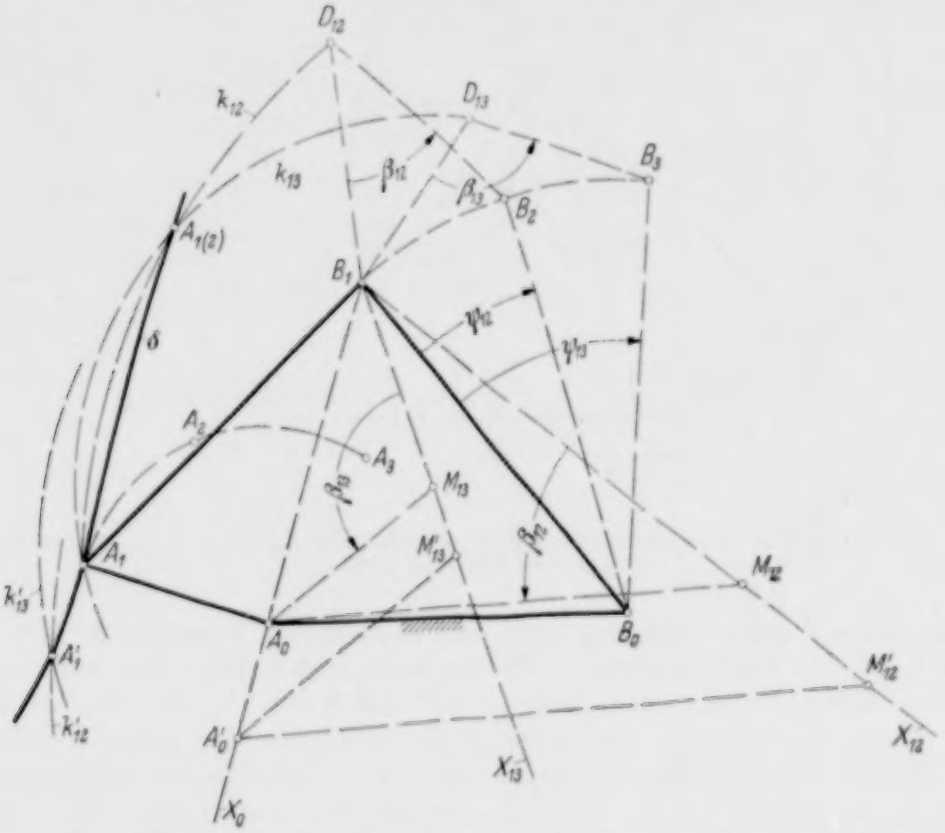


Abb. 10. Konstruktion eines Gelenkvierecks für eine zweifache Winkelzuordnung ψ_{12}, ψ_{13} zu β_{12}, β_{13}. Gestellpunkt A wandert auf Strahl B_1X_0.

Strecke die beiden gleichschenkligen Dreiecke $A_0M_{12}B_1$ und $A_0M_{13}B_1$ gezeichnet werden. Für die Winkel ψ_{12} und β_{12} ist nunmehr der geometrische Ort aller Punkte A_1 der Kreis k_{12} um M_{12} durch D_{12}. Für die Winkel ψ_{13} und β_{13} ist aber auch der Kreis k_{13} der geometrische Ort aller Punkte A_1, wenn dieser Kreis um M_{13} durch D_{13} gezeichnet wird. Die Kreise k_{12} und k_{13} schneiden sich in zwei Punkten A_1 und $A_{1(2)}$, so daß also für den angenommenen Gestellpunkt A_0 zwei Gelenkvierecke mit den Punkten A_1 bzw. $A_{1(2)}$ die gestellten Bedingungen erfüllen.

Es gibt nun für eine zweifache Winkelzuordnung ψ_{12} und ψ_{13} zu β_{12} und β_{13} unendlich viele Gelenkvierecke, wenn man die Lage des Gestellpunktes A_0 verändert. Läßt man diesen Punkt z. B. auf dem beliebig angenommenen Strahl B_1X_0 wandern, indem man andere Punkte A'_0 annimmt, so kann man die weiteren Strahlen B_1X_{12} und B_1X_{13} durch M_{12} und M_{13} und die Parallelen $A'_0M'_{13}$ zu A_0M_{13}, sowie $A'_0M'_{12}$ zu A_0M_{12} zeichnen. Dann schneiden sich die Kreise k'_{12} und k'_{13} um M'_{12} durch D_{12} und um M'_{12} durch D_{13} in neuen Punkten A'_1 und $A'_{1(2)}$. Alle diese A_1-Punkte bilden eine Kurve δ, die den geometrischen Ort der Punkte A_1 für eine geforderte zweifache Winkelzuordnung ψ_{12}, ψ_{13} zu β_{12}, β_{13} darstellt.

Wenn es für alle Lagen des Punktes A_0 auf dem Strahl B_1X_0 unendlich viele Gelenkvierecke mit vorgeschriebener zweifacher Winkelzuordnung gibt, so muß es für die Lage des Punktes A_0 auf diesem Strahl B_1X_0 eine bzw. mehrere Lösungen geben, wenn man noch ein drittes Winkelpaar ψ_{14}, β_{14} hinzunimmt. Man kann dann z. B. eine zweite Kurve δ für die Winkelzuordnungen ψ_{12},

ψ_{14} zu β_{12}, β_{14} zeichnen. Die Schnittpunkte dieser zweiten δ-Kurve mit der ersten stellen Lösungen für die dreifache Winkelzuordnung dar. Schwenkt man außerdem noch den Strahl B_1X_0 um den Punkt B_1, so hat man damit eine weitere Freiheit gewonnen, und alle Schnittpunkte der entsprechenden δ-Kurven ergeben dann eine Kurve als geometrischen Ort aller Punkte A_1 für dreifache Winkelzuordnungen. Diese neuen Kurven können sich nun wiederum gegenseitig schneiden, wenn man noch ein Winkelpaar ψ_{15}, β_{15} hinzunimmt. Damit sind aber die Möglichkeiten des Gelenkvierecks für vorgegebene Diagonalwinkel voll erschöpft. Die gleichen quantitativen Forderungen kann man auch bei den bisher behandelten Winkelzuordnungen erfüllen, was durch die sogenannte Wertigkeitsbilanz[1] nachgewiesen werden kann.

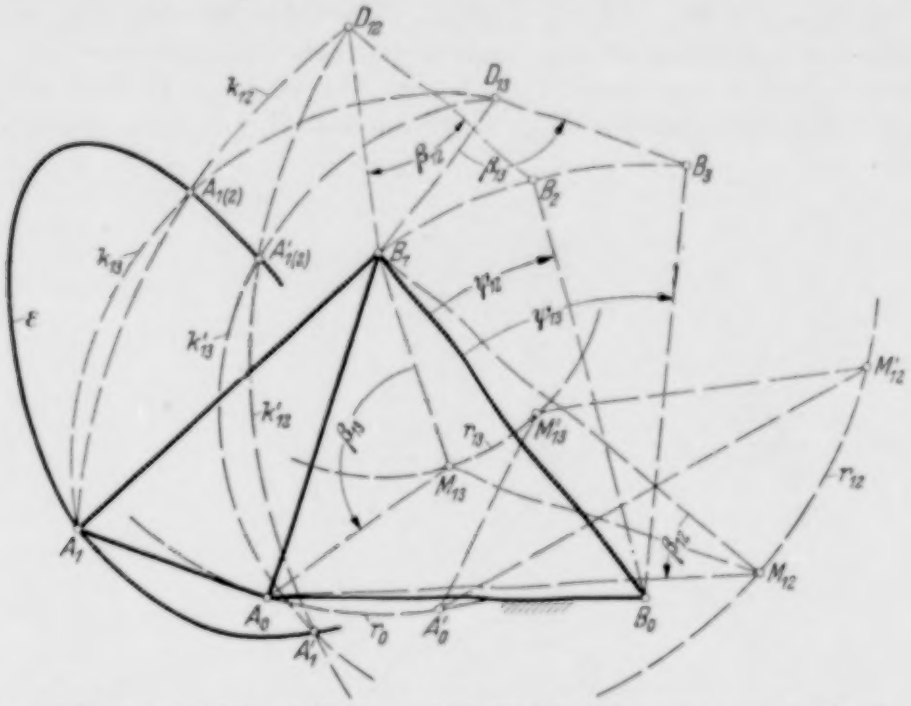


Abb. 11. Konstruktion eines Gelenkvierecks für eine zweifache Winkelzuordnung ψ_{12}, ψ_{13} zu β_{12}, β_{13}. Gestellpunkt A_0 wandert auf Kreisbogen r_0 um B_1.

Für eine zweifache Winkelzuordnung kann man in ähnlicher Weise wie in Abb. 10 auch noch unendlich viele Lagen des Gestellpunktes A_0 finden, wenn man diesen Punkt auf einem Kreisbogen r_0 um B_1 wandern läßt (Abb. 11). Dann müssen auch die Werte M_{12} und M_{13} auf je einem Kreisbogen r_{12} und r_{13} um B_1 wandern. Das bedeutet aber, daß man das gesamte Dreieck $A_0M_{12}M_{13}$ um den Punkt B_1 verschwenkt. Dann braucht man nur noch um die neuen Punkte M'_{12} und M'_{13} die Kreisbogen k'_{12} durch D_{12} und k'_{13} durch D_{13} miteinander zum Schnitt zu bringen und erhält neue Punkte A'_1 und $A'_{1(2)}$. Alle diese Punkte ergeben eine Kurve ε. Diese Kurve ε stellt also, ähnlich wie in Abb. 10 die Kurve δ, den geometrischen Ort aller Gelenkpunktlagen A_1 für die zweifache Winkelzuordnung dar. Bei der Forderung nach dreifacher Winkelzuordnung kann man die Halbmesser der Kreise r verändern und erhält jedesmal eine neue Kurve ε, die sich mit der vorhergehenden in einem oder mehreren Punkten schneidet. Alle diese Schnittpunkte ergeben dann neue Kurven als geometrische Örter für alle Gelenkpunktlagen A_1 bei dreifacher Winkelzuordnung. Diese Kurven müssen mit den entsprechenden, nach Abb. 10 ermittelten übereinstimmen. Sie entsprechen den im Schrifttum vielfach erwähnten Mittelpunktkurven.

5. Diagonalwinkel-Zuordnungen bei gegebenen beweglichen Gelenkpunkten. Bisher wurde außer den Punkten B_0 und B die Lage des Gestellpunktes A_0 angenommen und für diese Annahmen der bewegliche Gelenkpunkt A bestimmt. Geht man den umgekehrten Weg, indem man die B-Punkte und den beweglichen Gelenkpunkt A annimmt, so ergeben sich für die Lage des Gestellpunktes A_0 noch einfachere Verfahren als bisher. In Abb. 12 ist wiederum die Winkelzuordnung ψ_{12}, β_{12} vorgeschrieben, angenommen werden die Lagen B_0B_1 und B_0B_2, die den Winkel ψ_{12} einschließen, und die Lage des Gelenkpunktes A_1. Dann braucht man nur den Punkt B_1 um A_1 und um den Winkel β_{12} bis $B_{2.1}$ zu verschwenken und die Mittelsenkrechte g auf der Strecke $B_2B_{2.1}$ zu zeichnen. Diese Mittelsenkrechte ist der geometrische Ort aller die gestellte Aufgabe erfüllender Punkte A_0. Jedes beliebige Gelenkviereck, z. B. auch $A_0'A_1B_1B_0$ garantiert somit die geforderte Winkelzuordnung.

[1] *R. Kraus*, Feinwerk-Technik 56 (1932) S. 57.

Mit Hilfe der Konstruktion von Abb. 12 kann man mühelos auch eine Zweiwinkel-Zuordnung beherrschen. Sind also in Abb. 13 die Winkel ψ_{12} und ψ_{13} den gegebenen Winkeln β_{12} und β_{13} zuzuordnen, so kann man immer noch einen beliebigen Punkt A_1 annehmen und für diesen die Konstruktion nach Abb. 12 sowohl für den Winkel β_{12} als auch β_{13} durchführen, Damit erhält man die Punkte $B_{2.1}$ und $B_{3.1}$ und die Mittelsenkrechten g_{12} und g_{13} der Strecken $B_2B_{2.1}$ und $B_3B_{3.1}$. Der Schnittpunkt A_0 der beiden Mittelsenkrechten g_{12} und g_{13} erfüllt somit die gestellten Bedingungen. Nimmt man auf der Geraden B_1A_1 weitere beliebige Punkte (A_1) an, so braucht man nur noch um (A_1) den Kreisbogen durch B_1 zu zeichnen, der von den Parallelen durch (A_1) zu $B_1B_{2.1}$ und $A_1B_{3.1}$ in den Punkten $(B_{2.1})$ und $(B_{3.1})$ geschnitten wird. Damit ergeben sich neue Mittelsenkrechten (g_{12}) und (g_{13}), deren Schnittpunkt (A_0) wiederum die gestellte Aufgabe erfüllt. Alle so ermittelten Punkte A_0 liegen auf einer Kurve δ, und diese Kurve ist der geometrische Ort aller Gestellpunkte A_0, wenn der Gestellpunkt A_1 auf einer vorgegebenen Geraden wandert.

Man kann auch hier, ähnlich wie in Abb. 11, den Punkt A_1 auf einem Kreis um B_1 wandern lassen und erhält dann eine Kurve ε wiederum als geometrischen Ort für alle Punkte A_0.

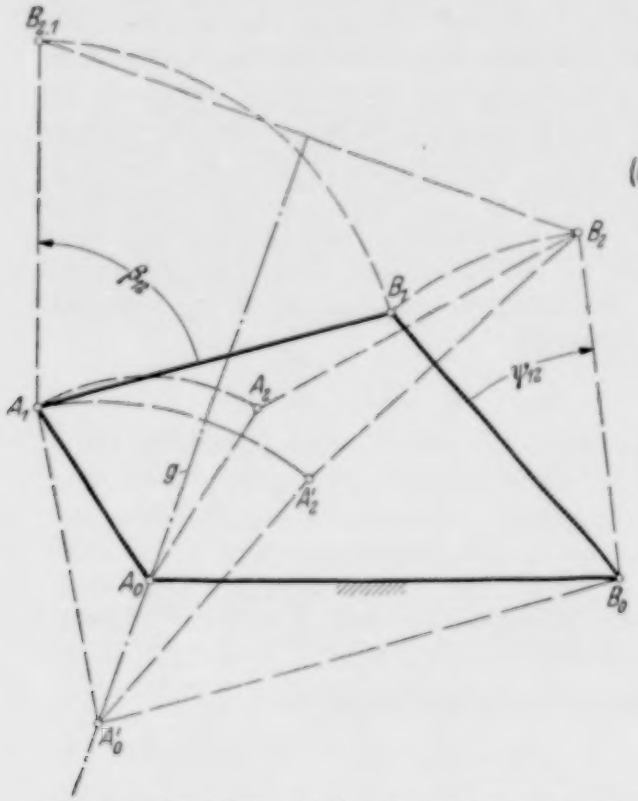


Abb. 12. Konstruktion der Mittelsenkrechten g als geometrischer Ort für alle Gestellpunkte A_0 bei Zuordnung der Diagonalwinkel ψ_{12} und β_{12}.

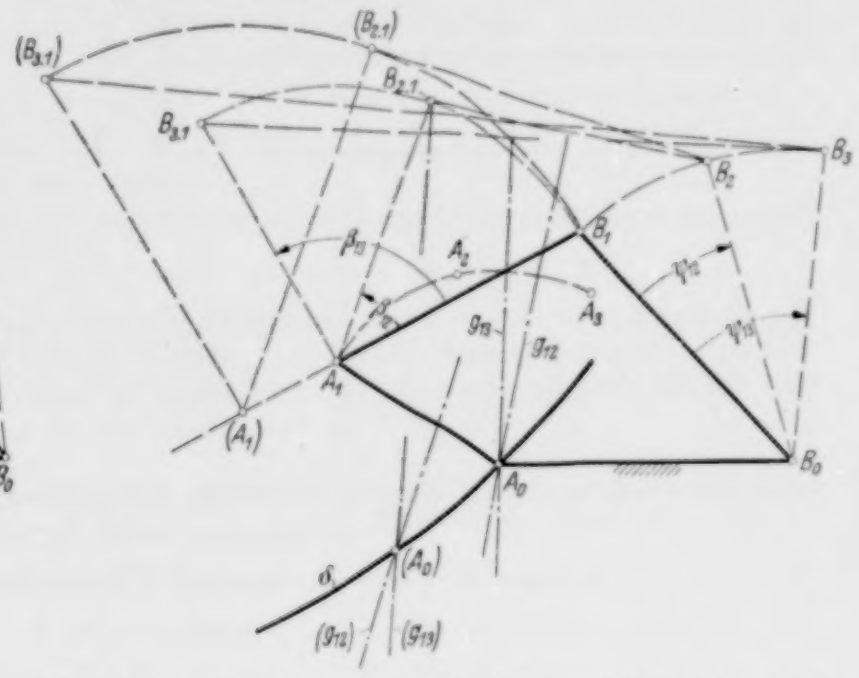


Abb. 13. Konstruktion eines Gelenkvierecks für eine zweifache Winkelzuordnung ψ_{12}, ψ_{13} zu β_{12}, β_{13}. Gestellpunkt A_1 wandert auf beliebig angenommenem Strahl B_1A_1.

Für jede beliebig angenommene Strecke B_1A_1 nach Abb. 13 gibt es also unendlich viele Punkte A_0 auf der Kurve δ, und bei jeder anderen Lage der Strecke B_1A_1 gibt es eine neue Kurve δ, die sich mit der alten in einem oder mehreren Punkten schneidet, wenn man ein drittes Winkelpaar ψ_{14}, β_{14} vorschreibt. Alle diese Schnittpunkte bilden wiederum eine Kurve, die hier der im Schrifttum vielfach erwähnten Kreispunktkurve für die üblichen Winkelzuordnungen entspricht. Für ein viertes Winkelpaar ψ_{15}, β_{15} kann man die Kreispunktkurven zum Schnitt bringen und erhält dann nur noch eine begrenzte, der Wertigkeitsbilanz entsprechende Anzahl von Lösungen.

6. Punktlagen-Reduktionen. In gleicher Weise wie bei den bisher üblichen Winkelzuordnungen[1] kann man auch hier Punktlagenreduktionen verwenden, wenn man dafür sorgt, daß zwei Gelenkpunktlagen des Punktes A_1 in einem Punkt zusammenfallen. In Abb. 14 fällt beispielsweise der Punkt A_1 mit dem Punkt A_3 zusammen, wenn man über dem Dreieck $B_1B_0B_3$ das gleichschenklige Dreieck $B_1A_1B_3$ mit dem eingeschlossenen gegebenen Winkel β_{13} zeichnet, wobei selbstverständlich der vorgeschriebene Richtungssinn beider Winkel zu berücksichtigen ist. Für diese Annahme kann man einen beliebig in der Zeichenebene liegenden Gestellpunkt A_0 wählen. Das sich daraus ergebende Gelenkviereck $A_0A_1B_1B_0$ wird immer, wie leicht einzusehen ist, das zugeordnete Winkelpaar ψ_{13}, β_{13} garantieren. Das Getriebeglied A_0A befindet sich dabei in einer so gekennzeichneten Getriebestellung in einer Doppellage, und zwischen den, dieser Doppellage entsprechenden beiden Getriebestellungen muß es eine Grenzlage A_0A_2 erreicht haben. Diese Grenzlage ist

[1] *K. Hain*, Zeitschr. Instrumentenkunde 63 (1943) S. 170.

ψ_{14} zu β_{12}, β_{14} zeichnen. Die Schnittpunkte dieser zweiten δ-Kurve mit der ersten stellen Lösungen für die dreifache Winkelzuordnung dar. Schwenkt man außerdem noch den Strahl B_1X_0 um den Punkt B_1, so hat man damit eine weitere Freiheit gewonnen, und alle Schnittpunkte der entsprechenden δ-Kurven ergeben dann eine Kurve als geometrischen Ort aller Punkte A_1 für dreifache Winkelzuordnungen. Diese neuen Kurven können sich nun wiederum gegenseitig schneiden, wenn man noch ein Winkelpaar ψ_{15}, β_{15} hinzunimmt. Damit sind aber die Möglichkeiten des Gelenkvierecks für vorgegebene Diagonalwinkel voll erschöpft. Die gleichen quantitativen Forderungen kann man auch bei den bisher behandelten Winkelzuordnungen erfüllen, was durch die sogenannte Wertigkeitsbilanz[1] nachgewiesen werden kann.

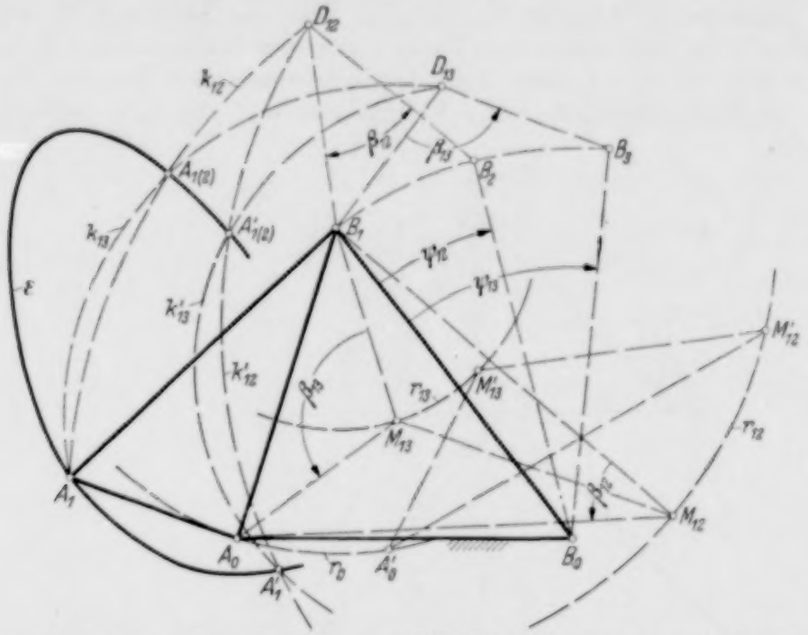


Abb. 11. Konstruktion eines Gelenkvierecks für eine zweifache Winkelzuordnung ψ_{12}, ψ_{13} zu β_{12}, β_{13}. Gestellpunkt A_0 wandert auf Kreisbogen r_0 um B_1.

Für eine zweifache Winkelzuordnung kann man in ähnlicher Weise wie in Abb. 10 auch noch unendlich viele Lagen des Gestellpunktes A_0 finden, wenn man diesen Punkt auf einem Kreisbogen r_0 um B_1 wandern läßt (Abb. 11). Dann müssen auch die Werte M_{12} und M_{13} auf je einem Kreisbogen r_{12} und r_{13} um B_1 wandern. Das bedeutet aber, daß man das gesamte Dreieck $A_0M_{12}M_{13}$ um den Punkt B_1 verschwenkt. Dann braucht man nur noch um die neuen Punkte M'_{12} und M'_{13} die Kreisbogen k'_{12} durch D_{12} und k'_{13} durch D_{13} miteinander zum Schnitt zu bringen und erhält neue Punkte A'_1 und $A'_{1(2)}$. Alle diese Punkte ergeben eine Kurve ε. Diese Kurve ε stellt also, ähnlich wie in Abb. 10 die Kurve δ, den geometrischen Ort aller Gelenkpunktlagen A_1 für die zweifache Winkelzuordnung dar. Bei der Forderung nach dreifacher Winkelzuordnung kann man die Halbmesser der Kreise r verändern und erhält jedesmal eine neue Kurve ε, die sich mit der vorhergehenden in einem oder mehreren Punkten schneidet. Alle diese Schnittpunkte ergeben dann neue Kurven als geometrische Örter für alle Gelenkpunktlagen A_1 bei dreifacher Winkelzuordnung. Diese Kurven müssen mit den entsprechenden, nach Abb. 10 ermittelten übereinstimmen. Sie entsprechen den im Schrifttum vielfach erwähnten Mittelpunktkurven.

5. Diagonalwinkel-Zuordnungen bei gegebenen beweglichen Gelenkpunkten. Bisher wurde außer den Punkten B_0 und B die Lage des Gestellpunktes A_0 angenommen und für diese Annahmen der bewegliche Gelenkpunkt A bestimmt. Geht man den umgekehrten Weg, indem man die B-Punkte und den beweglichen Gelenkpunkt A annimmt, so ergeben sich für die Lage des Gestellpunktes A_0 noch einfachere Verfahren als bisher. In Abb. 12 ist wiederum die Winkelzuordnung ψ_{12}, β_{12} vorgeschrieben, angenommen werden die Lagen B_0B_1 und B_0B_2, die den Winkel ψ_{12} einschließen, und die Lage des Gelenkpunktes A_1. Dann braucht man nur den Punkt B_1 um A_1 und um den Winkel β_{12} bis $B_{2.1}$ zu verschwenken und die Mittelsenkrechte g auf der Strecke $B_2B_{2.1}$ zu zeichnen. Diese Mittelsenkrechte ist der geometrische Ort aller die gestellte Aufgabe erfüllender Punkte A_0. Jedes beliebige Gelenkviereck, z. B. auch $A_0'A_1B_1B_0$ garantiert somit die geforderte Winkelzuordnung.

[1] *R. Kraus*, Feinwerk-Technik 56 (1932) S. 57.

Mit Hilfe der Konstruktion von Abb. 12 kann man mühelos auch eine Zweiwinkel-Zuordnung beherrschen. Sind also in Abb. 13 die Winkel ψ_{12} und ψ_{13} den gegebenen Winkeln β_{12} und β_{13} zuzuordnen, so kann man immer noch einen beliebigen Punkt A_1 annehmen und für diesen die Konstruktion nach Abb. 12 sowohl für den Winkel β_{12} als auch β_{13} durchführen. Damit erhält man die Punkte $B_{2.1}$ und $B_{3.1}$ und die Mittelsenkrechten g_{12} und g_{13} der Strecken $B_2B_{2.1}$ und $B_3B_{3.1}$. Der Schnittpunkt A_0 der beiden Mittelsenkrechten g_{12} und g_{13} erfüllt somit die gestellten Bedingungen. Nimmt man auf der Geraden B_1A_1 weitere beliebige Punkte (A_1) an, so braucht man nur noch um (A_1) den Kreisbogen durch B_1 zu zeichnen, der von den Parallelen durch (A_1) zu $B_1B_{2.1}$ und $A_1B_{3.1}$ in den Punkten $(B_{2.1})$ und $(B_{3.1})$ geschnitten wird. Damit ergeben sich neue Mittelsenkrechten (g_{12}) und (g_{13}), deren Schnittpunkt (A_0) wiederum die gestellte Aufgabe erfüllt. Alle so ermittelten Punkte A_0 liegen auf einer Kurve δ, und diese Kurve ist der geometrische Ort aller Gestellpunkte A_0, wenn der Gestellpunkt A_1 auf einer vorgegebenen Geraden wandert.

Man kann auch hier, ähnlich wie in Abb. 11, den Punkt A_1 auf einem Kreis um B_1 wandern lassen und erhält dann eine Kurve ε wiederum als geometrischen Ort für alle Punkte A_0.

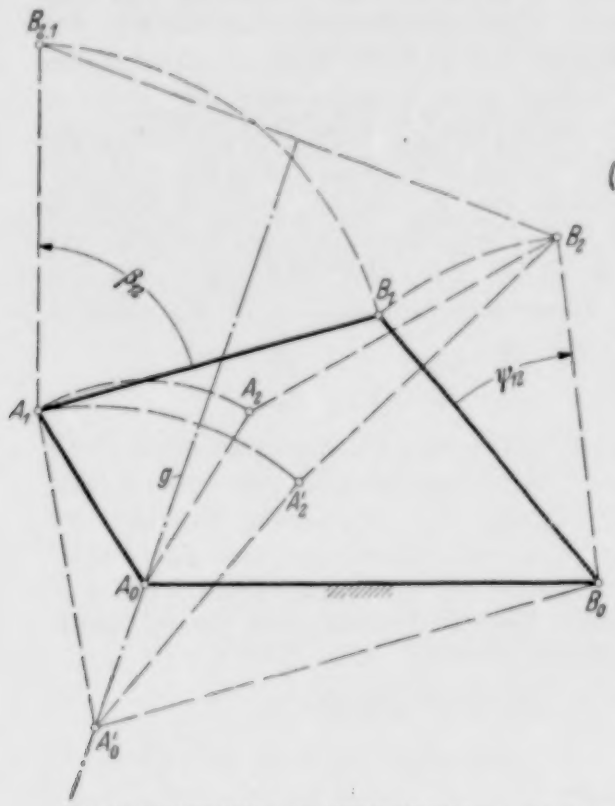


Abb. 12. Konstruktion der Mittelsenkrechten g als geometrischer Ort für alle Gestellpunkte A_0 bei Zuordnung der Diagonalwinkel ψ_{12} und β_{12}.

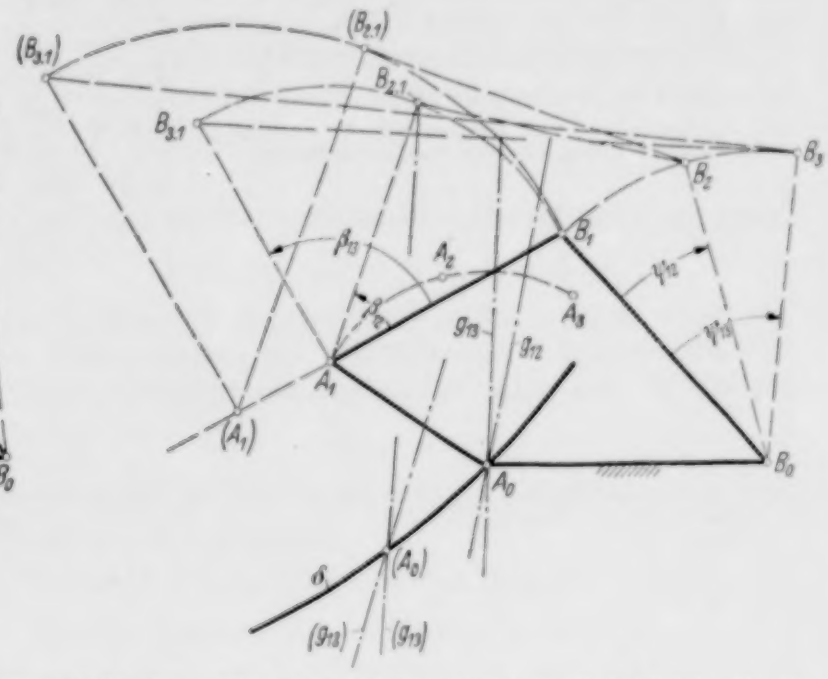


Abb. 13. Konstruktion eines Gelenkvierecks für eine zweifache Winkelzuordnung ψ_{12}, ψ_{13} zu β_{12}, β_{13}. Gestellpunkt A_1 wandert auf beliebig angenommenem Strahl B_1A_1.

Für jede beliebig angenommene Strecke B_1A_1 nach Abb. 13 gibt es also unendlich viele Punkte A_0 auf der Kurve δ, und bei jeder anderen Lage der Strecke B_1A_1 gibt es eine neue Kurve δ, die sich mit der alten in einem oder mehreren Punkten schneidet, wenn man ein drittes Winkelpaar ψ_{14}, β_{14} vorschreibt. Alle diese Schnittpunkte bilden wiederum eine Kurve, die hier der im Schrifttum vielfach erwähnten Kreispunktkurve für die üblichen Winkelzuordnungen entspricht. Für ein viertes Winkelpaar ψ_{15}, β_{15} kann man die Kreispunktkurven zum Schnitt bringen und erhält dann nur noch eine begrenzte, der Wertigkeitsbilanz entsprechende Anzahl von Lösungen.

6. Punktlagen-Reduktionen. In gleicher Weise wie bei den bisher üblichen Winkelzuordnungen[1] kann man auch hier Punktlagenreduktionen verwenden, wenn man dafür sorgt, daß zwei Gelenkpunktlagen des Punktes A_1 in einem Punkt zusammenfallen. In Abb. 14 fällt beispielsweise der Punkt A_1 mit dem Punkt A_3 zusammen, wenn man über dem Dreieck $B_1B_0B_3$ das gleichschenklige Dreieck $B_1A_1B_3$ mit dem eingeschlossenen gegebenen Winkel β_{13} zeichnet, wobei selbstverständlich der vorgeschriebene Richtungssinn beider Winkel zu berücksichtigen ist. Für diese Annahme kann man einen beliebig in der Zeichenebene liegenden Gestellpunkt A_0 wählen. Das sich daraus ergebende Gelenkviereck $A_0A_1B_1B_0$ wird immer, wie leicht einzusehen ist, das zugeordnete Winkelpaar ψ_{13}, β_{13} garantieren. Das Getriebeglied A_0A befindet sich dabei in einer so gekennzeichneten Getriebestellung in einer Doppellage, und zwischen den, dieser Doppellage entsprechenden beiden Getriebestellungen muß es eine Grenzlage A_0A_2 erreicht haben. Diese Grenzlage ist

[1] *K. Hain*, Zeitschr. Instrumentenkunde 63 (1943) S. 170.

dadurch gekennzeichnet, daß die Glieder B_0B und AB eine Strecklage einnehmen. Da bei der hier zur Frage stehenden Aufgabe die Bewegungen des Getriebegliedes A_0A nicht vorgeschrieben sind, sind diese auch für die praktische Ausführung gleichgültig. Man kann es u. U. sogar als Vorteil bezeichnen, daß das Getriebsglied A_0A bei der stetigen Bewegung der Glieder B_0B und AB hin- und herschwingt, denn dadurch braucht man für seine Bewegung entsprechend geringeren Platz vorzusehen.

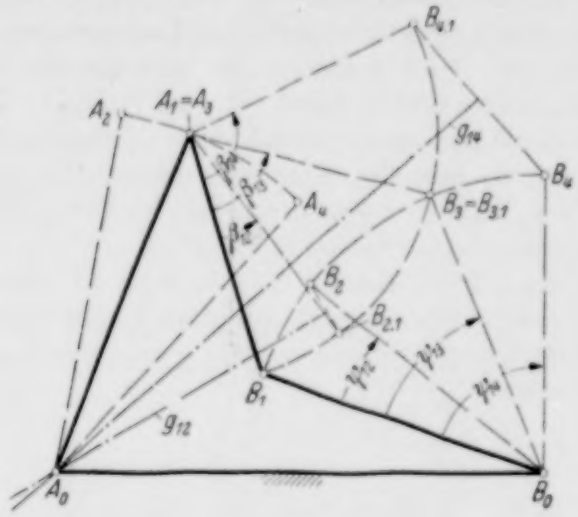


Abb. 14. Konstruktion eines Gelenkvierecks für dreifache Winkelzuordnung mit Hilfe einer Punktlagenreduktion.

Da bei der Vorgabe einer Punktlagenreduktion der Punkt A_0 beliebig in der Zeichenebene liegen kann, braucht man bei der Konstruktion eines Gelenkvierecks auch auf ihn bei den entsprechenden zwei Lagen keine Rücksicht zu nehmen. Ist also in Abb. 14 eine dreifache Winkelzuordnung ψ_{12}, ψ_{13}, ψ_{14} zu β_{12}, β_{13}, β_{14} vorgeschrieben und hat man für das Winkelpaar ψ_{13}, β_{13} die Punktlagenreduktion $A_1 = A_3$ vorgesehen, so braucht man nur noch an A_1B_1 die Winkel β_{12} und β_{14} im gegebenen Richtungssinne anzutragen und erhält die Punkte $B_{2,1}$ und $B_{4,1}$. Die Mittelsenkrechten g_{12} und g_{13} auf den Strecken $B_4B_{2,1}$ und $B_4B_{4,1}$ schneiden sich im Gestellpunkt A_0. In Abb. 14 ist ersichtlich, daß man nicht nur diese eine Punktlagenreduktion $A_1 = A_2$, sondern insgesamt sechs derartige Reduktionsmöglichkeiten hat, nämlich

$$A_1 = A_2, \quad A_1 = A_3, \quad A_1 = A_4, \quad A_2 = A_3, \quad A_2 = A_4, \quad A_3 = A_4 .$$

Das bedeutet aber, daß es unter Benutzung von Punktlagenreduktionen für eine geforderte Dreiwinkelzuordnung insgesamt sechs, die Aufgabe erfüllende Gelenkvierecke gibt, von denen man sich das für den gedachten Zweck günstigste heraussuchen kann.

Institut für Landtechnische Grundlagenforschung, Braunschweig-Völkenrode (Leitung: Prof. Dr. *W. Kloth*).

(Eingegangen am 31. August 1956.)

Anschrift des Verfassers: Ingenieur *K. Hain*, Braunschweig, Bundesallee 50.

Beitrag zur Berechnung in Querrichtung durchlaufender Plattenstreifen mit Hilfe *Fourier*scher Integrale

Von **F. W. Mader**

1. Einleitung. Plattenstreifen mit *Navier*schen Randbedingungen wurden für die verschiedenartigsten Lastangriffe berechnet. Eingespannte Plattenstreifen wurden von *Haeussler* u. a.[1] untersucht. Im folgenden soll ein Verfahren vorgeführt werden, mit dessen Hilfe Plattenstreifen unter dem Angriff von Randmomenten beliebiger Art berechnet werden können. Durch die Berücksichtigung der Stetigkeit der Biegefläche über der Auflagerlinie eines durchlaufenden Plattenstreifens können dann die Stützmomente über dieser Auflagerlinie gewonnen werden.

2. Momentenangriff am Plattenstreifenrand. Das längs eines Streifenrandes angreifende Moment wird in einen symmetrischen und einen antimetrischen Anteil zerlegt. Da der Rechnungsgang für beide Anteile grundsätzlich derselbe ist, wird im folgenden nur der symmetrische Anteil weiterverfolgt. Für den antimetrischen ist lediglich $\cos \alpha x$ durch $\sin \alpha x$ zu ersetzen. Das Moment wird nun in ein *Fourier*sches Integral entwickelt, das folgende Form aufweist:

$$M_y = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty m(\alpha) \cos \alpha x \, d\alpha \,.$$

Die Biegefläche muß der homogenen Plattengleichung $\Delta\Delta w = 0$ genügen und wegen der je zwei Randbedingungen an beiden Streifenrändern (Abb. 1) vier Freiwerte enthalten. Man wählt hier zweckmäßigerweise einen Ansatz aus hyperbolischen Funktionen von der Form

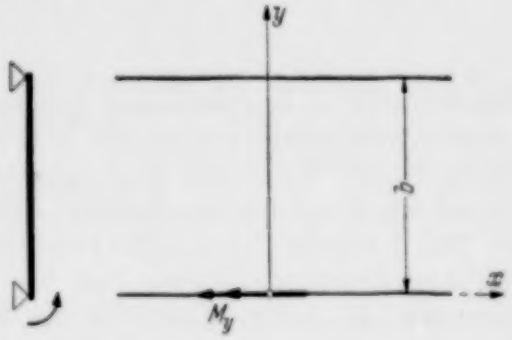


Abb. 1. Randmoment am Rand $y = 0$.

$$w = \int_0^\infty (A \operatorname{Cof} \alpha y + \alpha y \, B \operatorname{Sin} \alpha y + C \operatorname{Sin} \alpha y + \alpha y \, D \operatorname{Cof} \alpha y) \cos \alpha x \, d\alpha \,.$$

Er befriedigt die Plattengleichung. Die Randbedingungen lauten für den Rand $y = 0$

$$w = 0 \,, \tag{1}$$

$$w'' = -\frac{M_y}{N} \,, \tag{2}$$

wobei Punkte Ableitungen nach y, Striche Ableitungen nach x und

$$N = \frac{E t^3}{12 (1 - \nu^2)}$$

die Steifigkeit der Platte bedeuten.

Für den Rand $y = b$ lauten die Randbedingungen

$$w = 0 \,, \tag{3}$$

$$w'' = 0 \,. \tag{4}$$

Aus (1) erhält man $A = 0$, aus (2) $B = -\frac{m(\alpha)}{2 \pi N \alpha^2}$, schließlich aus (3) und (4)

$$C = B \frac{2 \alpha b}{\operatorname{Cof} 2 \alpha b - 1}$$

und

$$D = -B \frac{\operatorname{Cof} \alpha b}{\operatorname{Sin} \alpha b} \,.$$

---

[1] *A. Pucher*, Beiträge zur angewandten Mechanik (Federhofer-Girkmann-Festschrift) S. 306, Wien 1950; *E. Haeussler*, Umfangsgelagerte Platten, Diss. Hannover 1951.

Für die weiteren Untersuchungen benötigt man vor allem den Neigungswinkel der Biegefläche längs des Randes, an dem das Moment angreift:

$$\beta_y = w^{\cdot}$$

mit

$$w^{\cdot}_{y=0} = \int_0^\infty \alpha\,(C+D)\cos\alpha x\,d\alpha$$

und

$$C + D = \frac{m(\alpha)}{2\pi N\alpha^3}\,\frac{\mathfrak{Sin}\,2\alpha b - 2\alpha b}{\mathfrak{Cof}\,2\alpha b - 1}\,;$$

damit wird die Randneigung

$$w^{\cdot}_{y=0} = \frac{1}{2\pi N}\int_0^\infty \frac{m(\alpha)}{\alpha}\,\frac{\mathfrak{Sin}\,2\alpha b - 2\alpha b}{\mathfrak{Cof}\,2\alpha b - 1}\cos\alpha x\,d\alpha\,.$$

3. Einseitig eingespannter Plattenstreifen. Die Biegefläche eines beliebig belasteten, frei drehbar gelagerten Plattenstreifens läßt sich ebenfalls mit Hilfe *Fourier*scher Integrale bestimmen. Dies soll an einem einfachen Beispiel gezeigt werden.

Eine konstante Streckenlast p von der Länge $2c$ läßt sich in folgende Form entwickeln:

$$p_x = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty p(\alpha)\cos\alpha x\,d\alpha\,,$$

wobei für den beispielsweise gegebenen Lastfall $p(\alpha) = 2p/\alpha \sin \alpha c$ bedeutet. Die Biegefläche wird in zwei Bezirke unterteilt und zwar w_1 von $y_1 = 0$ bis $y_1 = b_1$ und w_2 von $y_2 = 0$ bis $y_2 = b_2$ (Abb. 2). Da die beiden Bezirke lastfrei sind, muß die Gleichung der Biegefläche wieder der homogenen Plattengleichung genügen. Für jeden der beiden Bezirke wird derselbe Lösungsansatz wie in Ziff. 2 gewählt. Die acht Freiwerte werden mit A_1, B_1, C_1, D_1, A_2, B_2, C_2 und D_2 bezeichnet. Zu ihrer Ermittlung stehen vier Rand- und vier Übergangsbedingungen zur Verfügung. Am Rand $y_1 = 0$ ist $w_1 = 0$ und $w_1^{\cdot\cdot} = 0$, am Rand $y_2 = 0$ ist $w_2 = 0$ und $w_2^{\cdot\cdot} = 0$. Für $y_1 = b_1$ und $y_2 = b_2$ gelten die Übergangsbedingungen

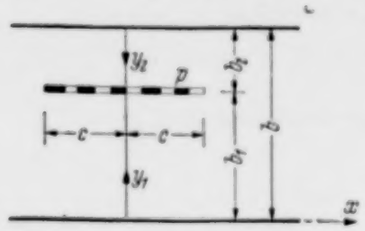


Abb. 2. Linienlast bei $y_1 = b_1$, $y_2 = b_2$.

$$w_1 = w_2\,,$$
$$w_1^{\cdot} = -\,w_2^{\cdot}\,,$$
$$w_1^{\cdot\cdot} = w_2^{\cdot\cdot}\,,$$
$$q_{y_1} + q_{y_2} = p_x\,,$$

wobei

$$q_y = -\,N\,(w^{\cdot\cdot\cdot} + w^{\prime\prime\prime})$$

bedeutet.

Aus den Randbedingungen erhält man $A_1 = B_1 = A_2 = B_2 = 0$. Die Übergangsbedingungen ergeben die vier Bestimmungsgleichungen für die restlichen Freiwerte. Es wird

$$C_1 = \frac{p(\alpha)}{\pi N\alpha^3}\,\frac{\alpha b_1\,\mathfrak{Cof}\,\alpha b_2\,\mathfrak{Sin}\,\alpha b + \mathfrak{Sin}\,\alpha b_2\,\mathfrak{Sin}\,\alpha b - \alpha b\,\mathfrak{Sin}\,\alpha b_1}{\mathfrak{Cof}\,2\alpha b - 1}\,,$$

$$D_1 = -\,\frac{p(\alpha)}{\pi N\alpha^3}\,\frac{\mathfrak{Sin}\,\alpha b_2\,\mathfrak{Sin}\,\alpha b}{\mathfrak{Cof}\,2\alpha b - 1}\,.$$

Die Werte C_2 und D_2 erhält man aus C_1 und D_1 durch Vertauschung von b_1 und b_2. Der Neigungswinkel längs des Randes $y_1 = 0$ ist wieder

$$\beta_{y_1\,(y_1=0)} = w^{\cdot}_{1(y_1=0)} = \int_0^\infty \alpha\,(C_1 + D_1)\cos\alpha x\,d\alpha\,,$$

$$C_1 + D_1 = \frac{p(\alpha)}{\pi N\alpha^3}\,\frac{\alpha b_1\,\mathfrak{Cof}\,\alpha b_2\,\mathfrak{Sin}\,\alpha b - \alpha b\,\mathfrak{Sin}\,\alpha b_1}{\mathfrak{Cof}\,2\alpha b - 1}\,;$$

damit erhält man die Randneigung zu

$$w^{\cdot}_{1(y_1=0)} = \frac{1}{\pi N}\int_0^\infty \frac{p(\alpha)}{\alpha^2}\,\frac{\alpha b_1\,\mathfrak{Cof}\,\alpha b_2\,\mathfrak{Sin}\,\alpha b - \alpha b\,\mathfrak{Sin}\,\alpha b_1}{\mathfrak{Cof}\,2\alpha b - 1}\cos\alpha x\,d\alpha\,.$$

Am eingespannten Rand muß die Neigung null sein, d. h. es muß dort ein Moment angreifen, das die entgegengesetzt gleichgroße Neigung hervorruft, so daß kommt

$$\beta_p + \beta_m = 0 .$$

Ist $p(\alpha)$ gegeben, so ist dies die Bestimmungsgleichung für $m(\alpha)$, woraus sich das Einspannmoment errechnen läßt:

$$m(\alpha) = -\frac{2\,p(\alpha)}{\alpha}\,\frac{\alpha\,b_1\,\mathfrak{Cof}\,\alpha\,b_2\,\mathfrak{Sin}\,\alpha\,b - \alpha\,b\,\mathfrak{Sin}\,\alpha\,b_1}{\mathfrak{Sin}\,2\,\alpha\,b - 2\,\alpha\,b} .$$

Das Einspannmoment ist nun

$$M_y = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty m(\alpha)\cos\alpha x\,d\alpha$$

$$= -\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{p(\alpha)}{\alpha}\,\frac{\alpha\,b_1\,\mathfrak{Cof}\,\alpha\,b_2\,\mathfrak{Sin}\,\alpha\,b - \alpha\,b\,\mathfrak{Sin}\,\alpha\,b_1}{\mathfrak{Sin}\,2\,\alpha\,b - 2\,\alpha\,b}\cos\alpha x\,d\alpha .$$

4. Zahlenbeispiel. Es sei

$$p(\alpha) = \frac{2\,p}{\alpha}\sin\alpha c .$$

Die Abmessungen der Platte seien $b_1 = b_2 = b/2$, $c = b = 4{,}0\ m$. Gesucht sei das maximale Einspannmoment an der Stelle $x = 0$, so daß $\cos\alpha x = 1$ ist. Dann wird

$$M = -\frac{4\,p}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sin 4\alpha}{\alpha}\,\frac{2\,\mathfrak{Cof}\,2\alpha\,\mathfrak{Sin}\,4\alpha - 4\,\mathfrak{Sin}\,2\alpha}{\mathfrak{Sin}\,8\alpha - 8\alpha}\,d\alpha .$$

Das Integral konvergiert; denn für $\lim\alpha \to 0$ nähert sich der Integrand dem Wert 1,5, für $\lim\alpha \to \infty$ wird der Integrand null und die Funktion ist überall im Intervall stetig und nimmt periodisch positive und negative Werte an, deren Maxima mit wachsendem x kleiner werden. Die numerische Auswertung des Integrals mit $4p/\pi$ multipliziert ergibt

$$M_y = -0{,}5789\,p .$$

5. In Querrichtung durchlaufender Plattenstreifen. Hier gelten grundsätzlich die gleichen Überlegungen wie in Ziff. 3. An einem Beispiel einer Zweifeldplatte soll der Rechnungsgang vorgeführt werden. Die Abmessungen und die Belastung des einen Plattenfeldes seien die gleichen wie in Ziff. 4, das zweite sei durch eine Flächenlast beansprucht. Durch den Ansatz

$$w = \int_0^\infty W_\alpha\,(1 + A\,\mathfrak{Cof}\,\alpha y + \alpha y\,B\,\mathfrak{Sin}\,\alpha y + C\,\mathfrak{Sin}\,\alpha y + \alpha y\,D\,\mathfrak{Cof}\,\alpha y)\cos\alpha x\,d\alpha$$

wird die inhomogene Plattengleichung befriedigt, wenn

$$p_{2y} = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty p(\alpha)\cos\alpha x\,d\alpha \quad \text{und} \quad W_\alpha = \frac{p(\alpha)}{\pi\,N\,\alpha^4}$$

bedeutet. Aus den Randbedingungen ergeben sich die Freiwerte

$$A = -1 ,$$

$$B = \frac{1}{2} ,$$

$$C = \frac{(\alpha\,b - 2\,\mathfrak{Sin}\,\alpha\,b)(1 - \mathfrak{Cof}\,\alpha\,b)}{\mathfrak{Cof}\,2\,\alpha\,b - 1} ,$$

$$D = \frac{\mathfrak{Sin}\,\alpha\,b\,(1 - \mathfrak{Cof}\,\alpha\,b)}{\mathfrak{Cof}\,2\,\alpha\,b - 1} .$$

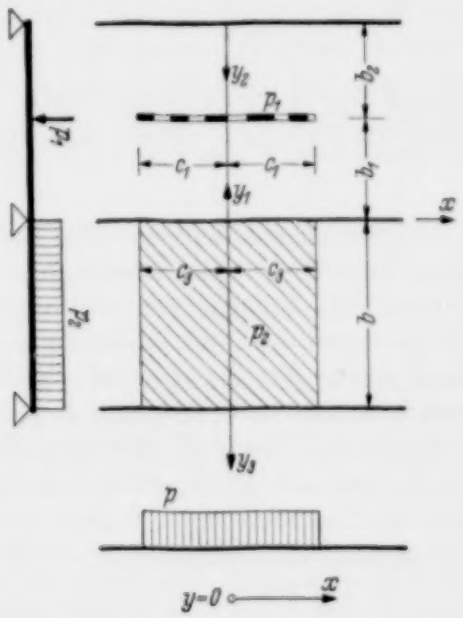


Abb. 3. Über zwei Felder durchlaufender Plattenstreifen.

Es wird wieder die Randneigung am Rand $y = 0$ bestimmt:

$$\beta_{y(y=0)} = w'_{y=0} = \int_0^\infty \alpha\, W_a\, (C + D) \cos \alpha x\, d\alpha$$

$$= \frac{1}{\pi N} \int_0^\infty \frac{p(\alpha)}{\alpha^3} \frac{(\alpha b - \operatorname{Sin} \alpha b)(1 - \operatorname{Cos} \alpha b)}{\operatorname{Cos} 2\alpha b - 1} \cos \alpha x\, d\alpha .$$

Bei der durchlaufenden Platte muß die Biegefläche über der Auflagerlinie, der Linie $y_1 = y_3 = 0$ stetig gekrümmt sein, d. h. es muß sein (Abb. 3)

$$\beta_{01} + \beta_{03} + \beta_{m1} + \beta_{m3} = 0 .$$

Unter der Voraussetzung gleicher Biegesteifigkeiten und gleicher Stützweiten beider Plattenfelder ist $\beta_{m1} = \beta_{m3} = \beta_m$, und die Bestimmungsgleichung für $m(\alpha)$ lautet

$$-2\,\beta_m = \beta_{01} + \beta_{03} ,$$

so daß

$$-\frac{1}{\pi N} \int_0^\infty \frac{m(\alpha)}{\alpha} \frac{\operatorname{Sin} 2\alpha b - 2\alpha b}{\operatorname{Cos} 2\alpha b - 1} \cos \alpha x\, d\alpha$$

$$= \frac{1}{\pi N} \int_0^\infty \frac{1}{\alpha^2 (\operatorname{Cos} 2\alpha b - 1)} \left\{ p_1(\alpha) (\alpha b_1 \operatorname{Cos} \alpha b_2 \operatorname{Sin} \alpha b - \alpha b \operatorname{Sin} \alpha b_1) \right.$$

$$\left. + \frac{p_2(\alpha)}{\alpha} (\alpha b - \operatorname{Sin} \alpha b)(1 - \operatorname{Cos} \alpha b) \right\} \cos \alpha x\, d\alpha$$

$$m(\alpha) = - \frac{p_1(\alpha) (\alpha b_1 \operatorname{Cos} \alpha b_2 \operatorname{Sin} \alpha b - \alpha b \operatorname{Sin} \alpha b_1) + \frac{p_2(\alpha)}{\alpha} (\alpha b - \operatorname{Sin} \alpha b)(1 - \operatorname{Cos} \alpha b)}{\alpha (\operatorname{Sin} 2\alpha b - 2\alpha b)}$$

wird. Das Biegemoment über der Auflagerlinie läßt sich hieraus errechnen zu

$$M_y = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty m(\alpha) \cos \alpha x\, d\alpha .$$

6. Zahlenbeispiel. Mit denselben Abmessungen wie unter **3.** und mit $c_1 = c_3$,

$$p_1 = p_2 = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty p(\alpha) \cos \alpha x\, d\alpha, \quad p(\alpha) = \frac{2p}{\alpha} \sin \alpha c$$

wird

$$M_y = -\frac{2p}{\pi} \int_0^\infty \frac{\sin 4\alpha}{\alpha} \left[\frac{b_1 \operatorname{Cos} \alpha b_2 \operatorname{Sin} \alpha b - b \operatorname{Sin} \alpha b_1}{\operatorname{Sin} 2\alpha b - 2\alpha b} + \frac{(\alpha b - \operatorname{Sin} \alpha b)(1 - \operatorname{Cos} \alpha b)}{\alpha^2 (\operatorname{Sin} 2\alpha b - 2\alpha b)} \right] \cos \alpha x\, d\alpha .$$

Es soll das Moment an der Stelle $x = 0$ errechnet werden, dann ist $\cos \alpha x = 1$, das Integral konvergiert, $\lim \alpha \to 0$ nähert sich dem Wert 5,5. Die numerische Auswertung ergibt

$$M_y = 1{,}4324\, p .$$

7. Zusammenfassung. Die Beanspruchungen und Verformungen eines Plattenstreifens unter dem Angriff eines Randmomentes wurden untersucht. Das Randmoment wurde in ein *Fourier*sches Integral entwickelt. Die gesuchten Größen ergeben sich als bestimmte Integrale, die numerisch ausgewertet werden. Insbesondere wurde die Neigung der Biegefläche am betrachteten Rand untersucht. Für eine gegebene Belastung, die ebenfalls in *Fourier*sche Integrale entwickelt wurde, wurde am betrachteten Rand die Neigung der Biegefläche bestimmt. Aus der Bedingung einer horizontalen Tangente der Biegefläche bei starrer Einspannung, bzw. der Stetigkeit der Biegefläche über der Auflagerlinie bei durchlaufenden Platten konnte durch Vergleich der Randneigungen das Einspann- bzw. Stützmoment ermittelt werden. Anhand von Beispielen wurden der Rechnungsgang erläutert und Ergebnisse gewonnen.

(Eingegangen am 4. September 1956.)

Anschrift des Verfassers: Dipl.-Ing. *Fritz W. Mader*, Hannover, Kortumstr. 12.

Über die Geschwindigkeitsverteilung in Wirbeln*

Von A. Timme

1. Einleitung. Bei vielen Strömungsvorgängen lassen sich eigenartige kreisende Bewegungen des strömenden Mediums beobachten, die offenbar einer besonderen Gesetzmäßigkeit unterliegen. In der beschreibenden Physik werden solche Flüssigkeitsbewegungen mit Wirbel bezeichnet, im Volksmund oft auch Strudel genannt[1]. Schon im Altertum findet man bei Homer eine Beschreibung des Strudels Charybdis, und im Mittelalter befaßte sich vornehmlich Leonardo da Vinci mit wirbelartigen Ablösungserscheinungen[2].

Will man spezielle Strömungsprobleme, bei denen Wirbel auftreten, wie z. B. die *Kármán*sche Wirbelstraße oder viele Übergangsstadien zwischen laminarer und turbulenter Strömung theoretisch näher erfassen, so ist eine genaue Kenntnis der Geschwindigkeitsverteilung in einem einzelnen Wirbel von besonderer Wichtigkeit. Im Rahmen des Forschungsprogramms des Hermann Föttinger-Institutes, das sich vornehmlich mit diesem Gebiet befaßt, sollten im Anschluß an die theoretischen und experimentellen Arbeiten von *U. Domm*[3] über die Stabilität von Wirbelstraßen neue Untersuchungen hierüber durchgeführt werden.

Eine *Kármán*sche Wirbelstraße entsteht, wenn ein zylindrischer Körper quer zu seiner Längsachse angeströmt wird. Es lösen sich bei bestimmten Anströmgeschwindigkeiten, die *Reynolds*schen Zahlen $Re > 40$ entsprechen, hinter dem Körper periodisch abwechselnd rechtsdrehende und linksdrehende Wirbel ab, die sich stromab zu der charakteristischen doppelreihigen Wirbelstraße anordnen (Abb. 1 und 2). Dieser Vorgang läßt sich im Versuch verhältnismäßig leicht darstellen, so daß es nahe lag, gerade bei der *Kármán*schen Wirbelstraße die Verhältnisse im Wirbel und die Wirkung von Wirbeln aufeinander zu untersuchen.

2. Meßverfahren. a) Meßprinzip. Ein zylindrischer Körper wurde von einem Schleppwagen durch einen mit Wasser gefüllten Kanal gezogen. Die hinter dem Zylinder entstehende *Kármán*sche Wirbelstraße wurde durch Bestreuen der Wasseroberfläche mit Aluminiumpulver kenntlich gemacht und von zwei über dem Kanal befindlichen Kameras in zeitlich festgelegter Reihenfolge photographiert. In diesen Photographien konnte aus der Länge der Bahnkurven der Aluminiumteilchen, dem Abbildungsmaßstab und der Kameraverschlußzeit für jeden Ort der Betrag und die Richtung der Teilchengeschwindigkeit bestimmt werden. Mit der Annahme, daß die Aluminiumteilchen während der Beobachtungszeit alle Bewegungen der Wasseroberfläche mitmachen, erhält man somit auch die Geschwindigkeitsverteilung im Strömungsfeld an der Wasseroberfläche.

b) Meßanordnung. Der für die Versuche benützte Kanal war 2 m lang, 50 cm breit und 40 cm tief. An der einen Schmalseite hatte er ein Überlaufwehr, damit man nach jedem Versuch bequem die Wasseroberfläche erneuern konnte. Neben dem Kanal lief der Schleppwagen auf einem separat gelagerten Breitflanschträger. An einem seitlichen Ausleger des Wagens konnten Zylinder verschiedenen Durchmessers befestigt werden. Während der Meßfahrt betätigte der Wagen zwei Schleifkontakte, die elektromagnetisch eine Stoppuhr für die Geschwindigkeitsbestimmung ein- und ausschalteten. Mit zwei weiteren Kontakten wurden die Verschlüsse der Photoapparate ausgelöst.

Als wesentliche Vorbedingung für die Reproduzierbarkeit der Untersuchungen war der gleichmäßige Lauf des Schleppwagens zu fordern. Vorversuche mit großdimensioniertem Gleichstrommotor; Gewichtsantrieb mit Reibungs- oder Strömungsbremse oder ihre Kombinationen mit einem Synchronmotor konnten nicht befriedigen. Lediglich der Betrieb mit einem genügend kräftigen, nicht selbstanlaufenden Synchronmotor zeigte bei stroboskopischer Überprüfung eine ausreichende Konstanz der Wagengeschwindigkeit im Bereich von 5 cm/s. Für noch kleinere Geschwindigkeiten gelangte ein selbstanlaufender Synchrondoppelmotor der Type AEG DSSE 1/4 s zum Einbau.

---

* Von der Fakultät für Maschinenwesen der Technischen Universität Berlin genehmigte Dissertation. Berichter: Prof. Dr.-Ing. *R. Wille*, Prof. Dr.-Ing. *H. Amtsberg*; eingereicht am 5. 4. 56, mdl. Prüfung am 23. 7. 56.

[1] *A. Sommerfeld*, Mechanik der deformierbaren Medien, S. 34, Leipzig 1955.

[2] Hdb. d. Exp.-Physik Bd. IV, 2. S. 7 ff.

[3] *U. Domm*, Ing.-Arch. 22. 6 (1954), S. 400.

Verschiedenartige Fehlerquellen, wie z. B. Drehschwankungen des großen Synchronmotors, die auf unsaubere Herstellung der Zähne am Rotor zurückzuführen waren, Eigenschwingungen des Systems Motor-Schleppseil (0,3 mm Durchmesser, Stahldraht) — Wagen, Teilungsfehler und

Abb. 1. *Kármán*sche Wirbelstraße $Re_s = 200$; $D = 2$ cm; $U = 1{,}018$ cm/s, Belichtung 1 sec., Maßstab 1:2.

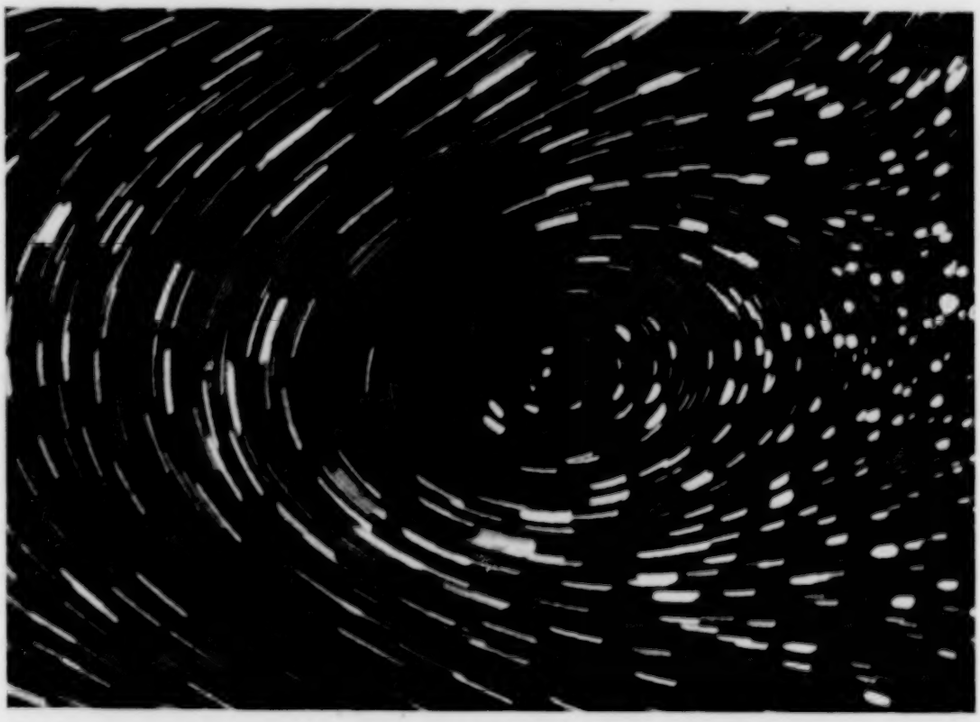


Abb. 2. Wirbel aus einer *Kármán*schen Wirbelstraße, Maßstab 1,67:1.

Spielschwankungen des Flanschgetriebes (3000:4) am kleinen Motor, konnten durch geeignete Maßnahmen cum grano salis beseitigt werden.

Die beiden Plattenkameras der Typen

1. Schneider-Kreuznach Doppel Anastigmat Isconar $f = 4{,}5$ 13,5 cm,
2. Rhodenstock „ „ Eurynar $f = 6{,}3$ 13,5 cm

waren an ein verstellbares Gerüst über dem Kanal montiert. Ihre Verschlußöffnungszeit ließ sich aus der Strichlänge eines am Schleppwagen befestigten Wegzeigers bestimmen. Um aber von zufälligen Geschwindigkeitsschwankungen des Wagens während der Aufnahme unabhängig zu sein, wurde später eine schnellaufende Synchronuhr mit von innen leuchtendem Zifferblatt und Zeiger mitphotographiert. Dazu stand die Uhr seitlich am Kanalrand. Durch ein Linsensystem und einen dicht über der Wasseroberfläche angebrachten Spiegel wurde das verkleinerte Bild der Uhr in die Objektebene der Kameras hineinprojiziert. Schwierig war die Justierung des Systems deshalb, weil durch die große Parallaxe der beiden nebeneinander angebrachten Kameras die benötigte Spiegelfläche leicht bei dem inneren Apparat Teile des Meßraumes abdeckte.

Mit dieser Anordnung war es nicht nur möglich, die Verschlußöffnungszeit T genau zu bestimmen, sondern auch noch die Zeitdifferenz Δt zwischen den beiden Aufnahmen zu überprüfen. Die Verschlußauslösung erfolgte, wie schon erwähnt, elektromagnetisch. Die Zeit Δt registrierte eine zweite Stoppuhr ebenfalls elektromagnetisch. Um die Anzugszeit der Auslösemagnete, die bei beiden Apparaten verschieden sein konnte, auszuschalten, schlossen die Magnete erst in dem Augenblick einen Relaiskontakt, indem der Verschluß tatsächlich betätigt wurde. Die Justierung war jedoch sehr schwierig, wie sich aus Überprüfungen mit der Synchronuhr ergab, zumal die Compurverschlüsse sowohl bei der Stellung M als auch T benutzt wurden, so daß schließlich nur noch der Synchronuhrmeßwert verwandt wurde. Dicht über der Wasseroberfläche befanden sich noch zwei Meßmarken als Längenmaßstab für die Auswertung photographischer Vergrößerungen.

c) Die Messung und ihre Auswertung. Etwa 5 bis 10 Stunden vor Beginn der Messung wurde in den Kanal frisches Wasser nachgefüllt, bis der Wasserspiegel das Überlaufwehr überspülte. Hierdurch erhielt man eine einwandfrei saubere Oberfläche. Danach durfte die Wassermasse nicht weiter gestört werden. Die Meßfahrt selbst begann mit dem Augenblick der Bestreuung. Der Wagenantriebsmotor war so einzuschalten, daß die Auslösung der Photoverschlüsse zwischen 10 bis 40 sec nach dem Aufbringen der Bestreuung erfolgte. Zu einem späteren Zeitpunkt konglomerieren die Aluminiumteilchen, so daß man kein feinmaschiges Bahnliniennetz erhält. War der Versuch störungsfrei abgelaufen und das Plattenpaar auswertbar, so wurden Vergrößerungen im Maßstab 1:1 zur Wirklichkeit hergestellt. In vorherigen Testaufnahmen waren im Zusammenhang die Kameraobjektive, das Vergrößerungsobjektiv und die Schrumpfung des Photopapiers durch den Trocknungsprozeß überprüft worden. Sowohl hierbei als auch bei den späteren Meßaufnahmen wurde die Parallelität der Plattenebene zur Objektebene mittels Wasserwaagen kontrolliert. Trotz einer geringen kissenförmigen Verzeichnung der Objektive von 0,3% bzw. 0,07% und einer linearen Verzerrung von 0,5% bzw. 0,06% wurden diese Fehler als vernachlässigbar klein angesehen.

Zur Kontrolle der Schrumpfung des Papieres, die von der Temperatur der Trockenpresse abhängt, wurde später im Kontaktverfahren ein durchsichtiger Maßstab mitkopiert. Für die Einzelauswertung genügte dies jedoch nicht, sondern dazu mußte jeder Wirbel extra im Maßstab 5:1 zur Wirklichkeit (die Platte etwa 15fach) vergrößert werden. Sodann wurde in die Vergrößerung in Originalgröße als Koordinatensystem die Straßenachse und senkrecht dazu Achsen mit Zentimetereinteilung durch die scheinbaren Wirbelmittelpunkte eingezeichnet. Nach Übertragung dieser Achsen in die Einzelvergrößerungen konnten nun die Strichlängen der Teilchen entlang den Querachsen ausgemessen werden.

Wegen der Unsymmetrie des Rotationsfeldes wurden nur Teilchenbahnlinien durch die Achse oder in unmittelbarer Nähe berücksichtigt. Im Laufe fortschreitender Versuchstechnik mußte festgestellt werden, daß die Papierschrumpfung durch Feuchtigkeits- und Temperaturschwankungen im Laborraum zu merkbaren Fehlern führte. Infolgedessen konnten die Papiervergrößerungen nur noch zur Orientierung der Koordinatenachsen benutzt werden, während die eigentliche Auswertung direkt unter dem Vergrößerungsapparat erfolgte.

3. Meßergebnisse. Den im folgenden Kapitel zu interpretierenden Meßergebnissen liegen die Erfahrungen aus weit über 100 Meßanläufen zugrunde, welchen ungezählte fehlgeschlagene Vorversuche vorausgingen. Es wurden etwa 70 Wirbelprofile genauer ausgewertet, wobei die Auswertung eines Wirbels mit dem Profil zur Zeit t_1 und dem Profil zur Zeit t_2 mehrere Stunden Dunkelkammerarbeit erforderte. Der notwendige Zeitaufwand ließ eine gewisse Einschränkung in der Variation der Versuchsparameter geboten erscheinen.

a) Bereich $Re = 200$. Im ersten Versuchsabschnitt wurden die Messungen mit folgenden Versuchsbedingungen durchgeführt: Zylinderdurchmesser $D = 2$ cm, Zylindergeschwindigkeit $U = 1{,}018$ cm/s. Es ist üblich, die eine *Kármán*sche Wirbelstraße charakterisierende dimensions-

lose Kennziffer, die *Reynolds*-Zahl, mit diesen Werten zu bilden:

$$Re = \frac{U\,D}{\nu}\,.$$

Für das untersuchte Gebiet ist damit

$$Re = 200\,.$$

Die Bildung der Wirbel hinter dem Zylinder und ihre Anordnung zu einer doppelreihigen Wirbelstraße ist selbstverständlich bei Anlegung des hier erforderlichen scharfen Maßstabes ein störungsempfindlicher Vorgang. Häufig war die Straße aus unbekanntem Anlaß unregelmäßig. Dadurch waren mehr als $^2/_3$ aller Aufnahmen nicht auswertbar. Die Ursache dieser Störungen kann nicht mit Sicherheit angegeben werden, sie scheint jedoch von der Wartezeit zwischen zwei Meßanläufen abhängig zu sein. Bei den besten Aufnahmen wurde bis zu 19 Stunden die Beruhigung der Wassermasse abgewartet. So genügt vielleicht schon eine geringe Restströmung innerhalb der untersuchten Wassermassen, um die Wirbelstraße unter Umständen erheblich zu stören.

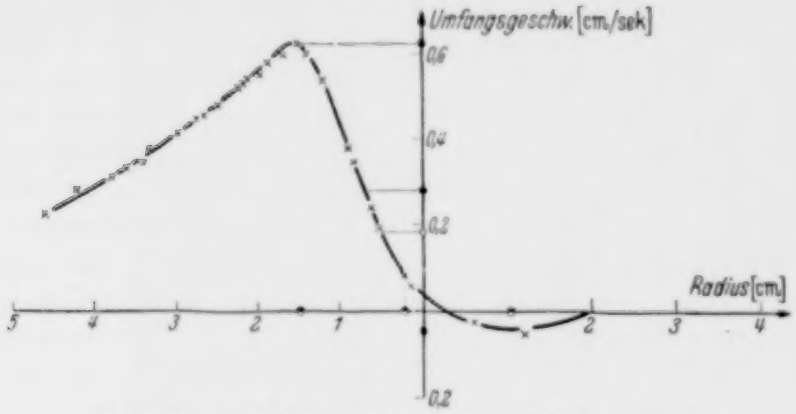


Abb. 3. Geschwindigkeitsverteilung in einem Wirbel $Re_z = 200$. Erster Wirbel hinter dem Zylinder.

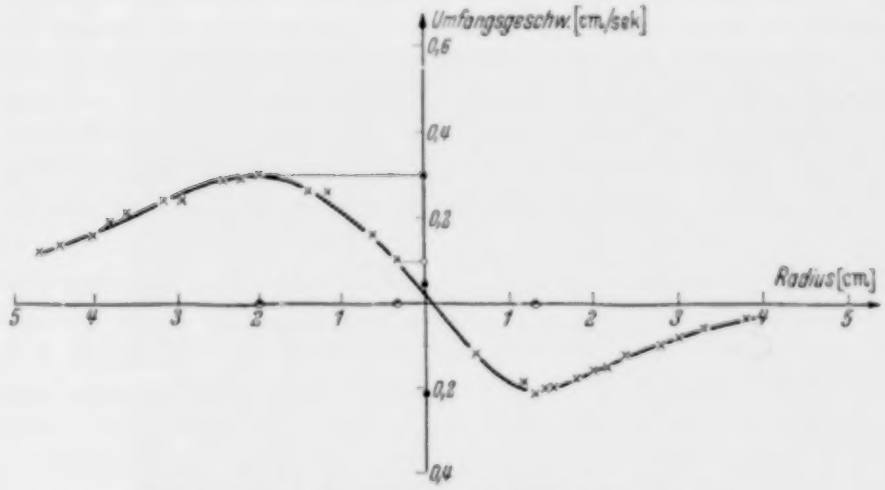


Abb. 4. Geschwindigkeitsverteilung in einem Wirbel $Re_z = 200$. Fünfter Wirbel hinter dem Zylinder.

Als Beispiele für die durch die Auswertung erhaltenen Wirbelprofile seien hier nur je ein Profil eines jungen Wirbels (Abb. 3) — das ist ein Wirbel in der Nähe des Zylinders — und eines älteren Wirbels (Abb. 4) wiedergegeben. In ihren wesentlichen Merkmalen sind sie sich alle untereinander ähnlich.

Auffallend ist zunächst die Unsymmetrie, welche auf die Eigenbewegung der Wirbel, häufig mit Nachlaufgeschwindigkeit bezeichnet, zurückzuführen ist. Dadurch gibt die Stelle mit der Geschwindigkeit Null, der scheinbare Mittelpunkt, nicht den wahren Wirbelmittelpunkt an. Sondern dieser ist in der Mitte zwischen den beiden Stellen maximaler Umfangsgeschwindigkeit anzunehmen, wo er sich mit dem arithmetrischen Mittel der maximalen Umfangsgeschwindigkeiten fortbewegen wird. Von dieser Stelle aus mögen im folgenden auch die Geschwindigkeiten und Radien gemessen werden.

In der Nähe des Wirbelmittelpunktes wächst die Umdrehungsgeschwindigkeit etwa linear mit dem Radius r, um nach einem Übergangsgebiet ungefähr mit der Potenz $1:r$ wieder abzufallen. Die zeitlichen Änderungen, die durch die beiden Aufnahmen hintereinander festgestellt werden konnten, zeigten allgemein einen Abfall des Geschwindigkeitsanstieges im Wirbelmittelpunkt. Die maximalen Umfangsgeschwindigkeiten nehmen mit der Zeit ab, während der zugehörige Radius, den man auch mit Kernradius zu bezeichnen pflegt, größer wird. Es bietet sich somit das Bild eines laminaren Wirbels, der sich auf Grund der Zähigkeitswirkung ausbreitet und damit einem Ausgleichsgesetz unterliegt.

b) Bereich $Re = 1000$. Im zweiten Versuchsabschnitt wurde derselbe Zylinderdurchmesser $D = 2$ cm verwendet, die Zylindergeschwindigkeit auf $U = 5{,}24$ cm/s erhöht. Somit war die *Reynolds*-Zahl

$$Re = 1048\,.$$

Diesmal erwies sich der Vorgang der Straßenbildung als noch wesentlich störungsempfindlicher als im Bereich der kleinen *Re* - Zahl. Sehr häufig wuchsen kleine Störungen oder Unregelmäßigkeiten derart an, daß schließlich die ganze Straße zerfiel. Auch die ausgewerteten Wirbelprofile zeigten Störungsmerkmale, die in dem vorhergehenden Abschnitt nicht beobachtet wurden.

In den beigefügten Wirbelprofilen (Abb. 5 bis 8) lassen sich folgende charakteristische Erscheinungen beobachten: Auf dem linken Ast von Abb. 5a (Zeit t_1) zeichnet sich eine Ausbuchtung ab, die sich bei Abb. 5b (Zeit t_2) wieder dem Gesamtprofil eingefügt hat. In Abb. 6a und Abb. 6b ergibt sich der zeitlich umgekehrte Verlauf. Also Störungen, die auftreten und wieder abklingen können (dieser Effekt ist aus der Drehung des Wirbels allein noch nicht zu erklären, wie man aus einer zahlenmäßigen Nachrechnung ersehen kann).

Das Profil in Abb. 7 ist zu beiden gemessenen Zeiten störungsfrei. Weiterhin konnte verschiedentlich beobachtet werden, wie ein Wirbel von regelmäßigem Aussehen sich in drei Einzelwirbel auflöst. Den umgekehrten Vorgang zeigt Abb. 8. In Abb. 8a ist der Wirbel noch sehr gestört, um dann in Abb. 8b wieder die Charakteristik eines sehr jungen Wirbels — wenigstens in Kernnähe — zu gewinnen. Sieht man von diesen Störungserscheinungen ab, so gelten auch für die Wirbel dieses *Re*-Bereiches die oben angegebenen Merkmale eines Ausbreitungsvorganges.

4. Vergleich der Meßergebnisse mit der hydrodynamischen Theorie. Eine exakte Lösung der *Navier-Stokes*schen Differentialgleichung konnte von *C. W. Oseen*[1] und *G. Hamel*[2] für den Spezialfall der ebenen Strömung angegeben werden, sofern rotationssymmetrische Randbedingungen vorliegen. Für die reine Wirbelströmung wurde als Anfangsbedingung die Geschwindigkeitsverteilung des Potentialwirbels

$$c_\varphi = \frac{\Gamma}{2\pi r}, \qquad c_r = 0 \tag{1}$$

eingesetzt. Damit ergab sich für die reibungsbehaftete Flüssigkeit

$$c_\varphi = \frac{\Gamma}{2\pi r}\left(1 - e^{-\frac{r^2}{4\nu t}}\right), \qquad c_r = 0\,. \tag{2}$$

Diese Gleichung beschreibt qualitativ tatsächlich das zeitliche Verhalten eines Wirbels so, wie es auch in den Experimenten beobachtet werden konnte. Daher erschien es sinnvoll, diese Gleichung auch für einen quantitativen Vergleich mit den gemessenen Wirbelprofilen heranzuziehen.

Nun sprach *U. Domm*[3] im Anschluß an seine Stabilitätsrechnung die Vermutung aus, daß die für das zeitliche Wachsen der Wirbel verantwortliche Größe ν einen größeren Zahlenwert als den der laminaren Zähigkeit haben müßte. *H. B. Squire*[4] berechnete die Geschwindigkeitsverteilung eines Wirbels unter Berücksichtigung turbulenter Schwankungen und erhielt das laminare Geschwindigkeitsgesetz, bei dem das ν um eine additive Größe erhöht war.

Um einen solchen Effekt zu untersuchen, hat man in (2) neben den beiden Größen Γ und t auch den Wert von ν als Unbekannte anzusehen. Mit einem Geschwindigkeitsprofil allein ist die Bestimmung dieser drei Größen noch nicht möglich, erst die Aufnahme eines zweiten Wirbelprofils nach einer Zeit Δt ermöglicht die Berechnung auf Grund folgender Beziehungen:

Der Geschwindigkeitsanstieg in der Nähe des Wirbelmittelpunktes ($r \approx 0$) ergibt sich zu

$$\left(\frac{\partial c_\varphi}{\partial r}\right)_{r=0} = c'_{\varphi_0} = \frac{\Gamma}{8\pi\nu t}\,. \tag{3}$$

Aus den Geschwindigkeitsanstiegen zu den Zeiten t_1 und t_2 folgt mit $t_2 - t_1 = \Delta t$

$$\frac{\Gamma}{\nu} = \frac{8\pi\,\Delta t}{1/c'_{\varphi_{02}} - 1/c'_{\varphi_{01}}}\,. \tag{4}$$

Den Radius r_m der maximalen Umdrehungsgeschwindigkeit $c_{\varphi m}$ erhält man nach kurzer numerischer Rechnung mit

$$\frac{r_m^2}{4\nu t} = 1{,}2564 \tag{5}$$

---

[1] *C. W. Oseen*, Ark. f. Mat., Astron. och Fys. 7 (1911); Hydrodynamik, S. 82., Leipzig 1927.
[2] *G. Hamel*, Jahresb. Deutsch. Math.-Vereinig. 25 (1917), S. 34.
[3] Siehe Fußnote 3 von Seite 205.
[4] *H. B. Squire*, National Advisory Committee for Aeronautics 16, 666 F. M. 2053 vom 18. 3. 1954.

und hieraus

$$\nu = \frac{r_{m_2}^2 - r_{m_1}^2}{5{,}026 \cdot \Delta t} \,. \tag{6}$$

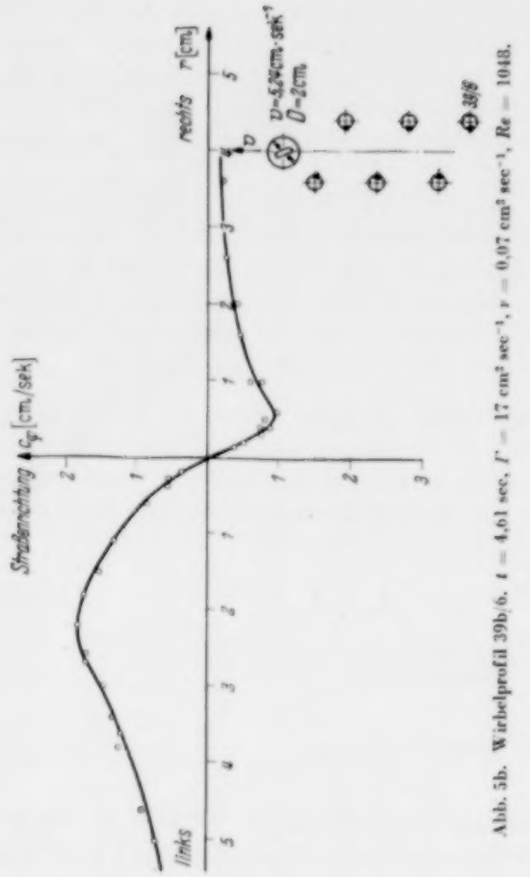


Abb. 5b. Wirbelprofil 39b/6. $t = 4{,}61$ sec, $\Gamma = 17$ cm² sec^{-1}, $\nu = 0{,}07$ cm² sec^{-1}, $Re = 1048$.

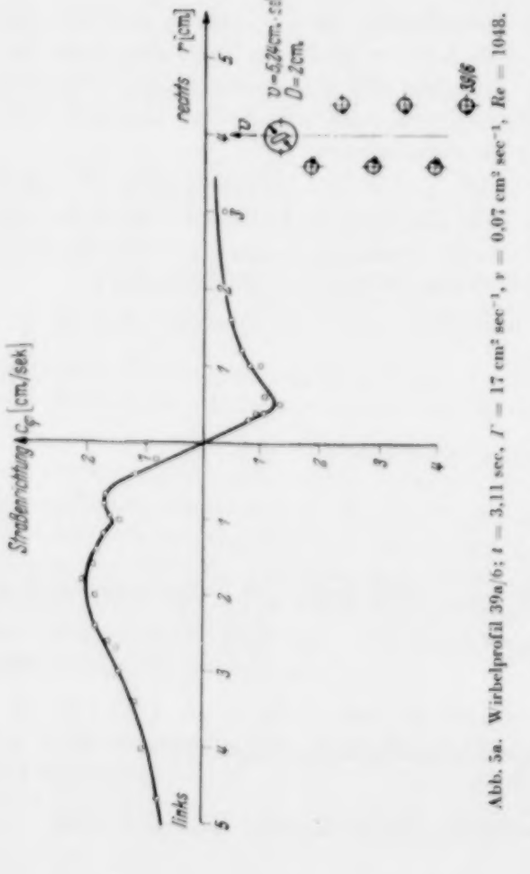


Abb. 5a. Wirbelprofil 39a/6; $t = 3{,}11$ sec, $\Gamma = 17$ cm² sec^{-1}, $\nu = 0{,}07$ cm² sec^{-1}, $Re = 1048$.

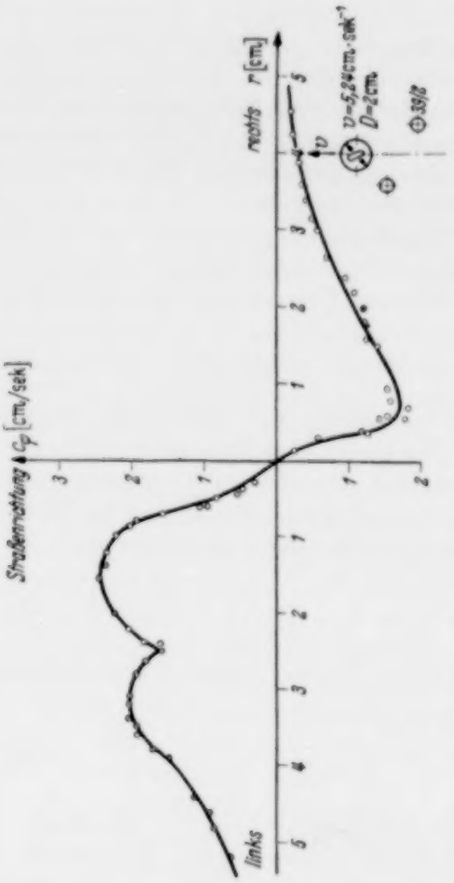


Abb. 6b. Wirbelprofil 39b/2; $t = 2{,}0$ sec, $\Gamma = 25$ cm² sec^{-1}, $\nu = 0{,}17$ cm sec^{-31}, $Re = 1048$.

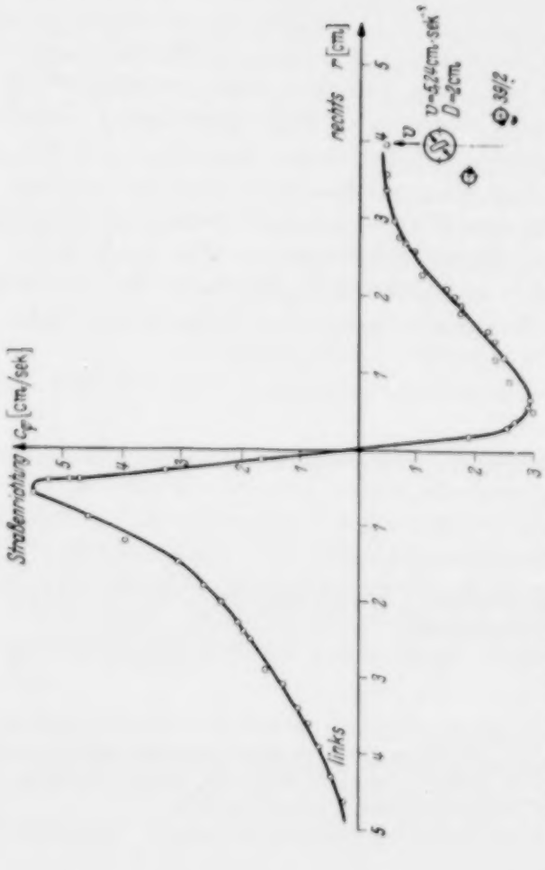


Abb. 6a. Wirbelprofil 39a/2; $t = 0{,}50$ sec, $\Gamma = 25$ cm² sec^{-1}, $\nu = 0{,}17$ cm² sec^{-1}, $Re = 1048$.

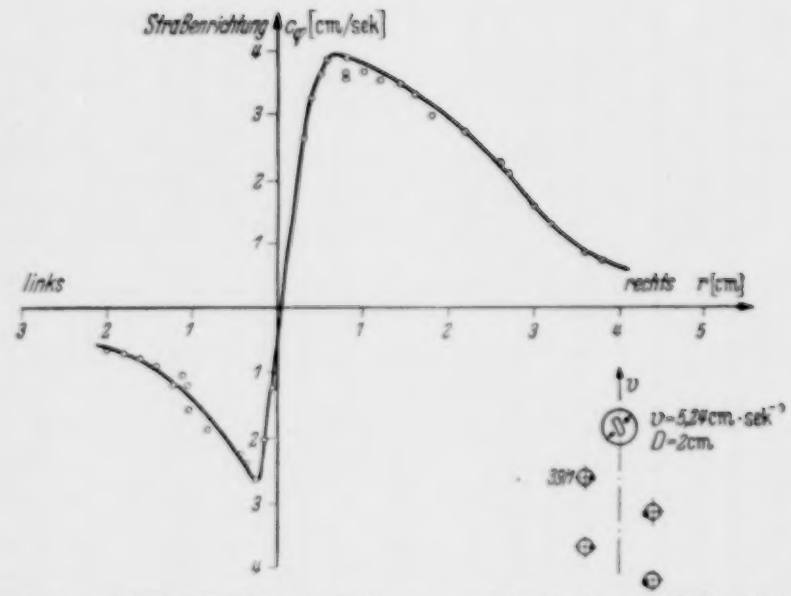


Abb. 7a. Wirbelprofil 39a/1; $t = 0{,}552$ sec, $\Gamma = 17$ cm² sec^{-1}, $\nu = 0{,}064$ cm²/sec^{-1}, $Re = 1{,}048$.

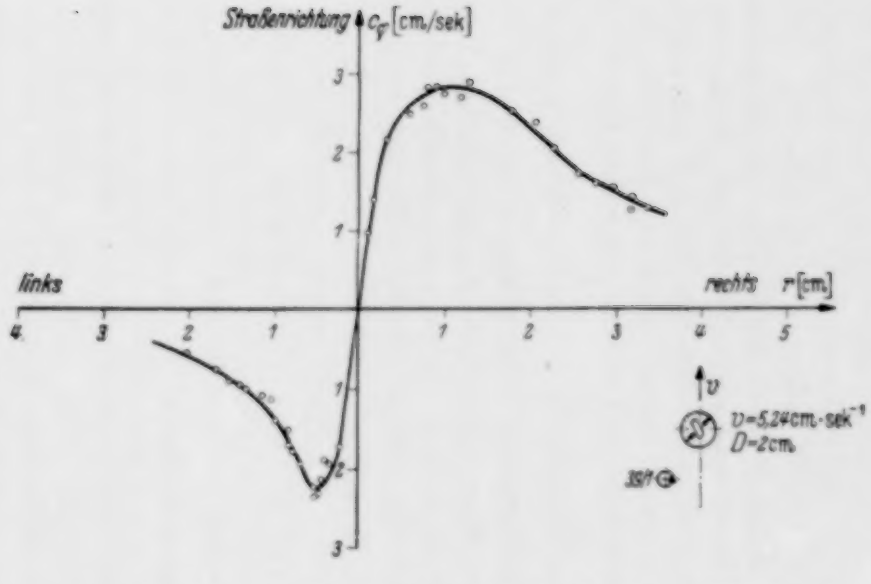


Abb. 7b. Wirbelprofil 39b/1. $t = 2{,}05$ sec, $\Gamma = 17$ cm² sec^{-1}, $\nu = 0{,}064$ cm² sec^{-1}, $Re = 1048$.

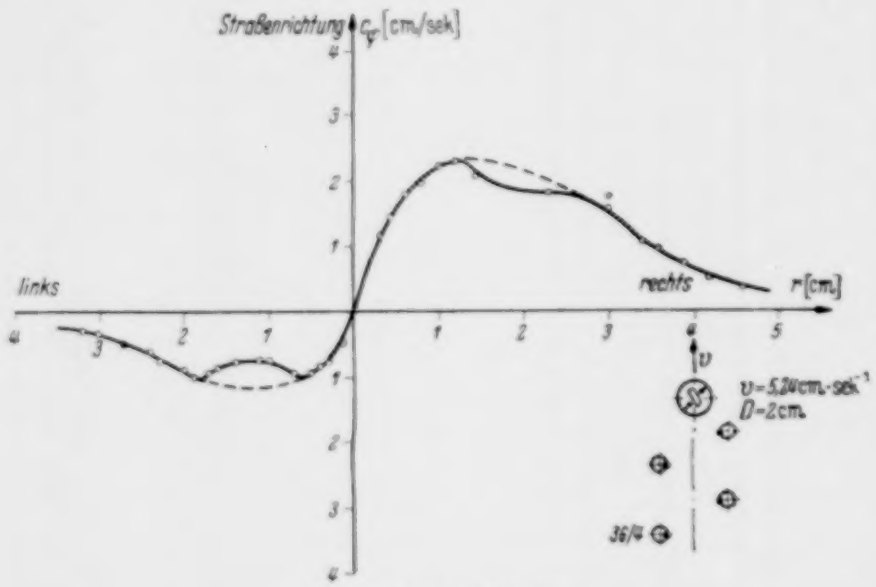


Abb. 8a. Wirbelprofil 36 a/4.

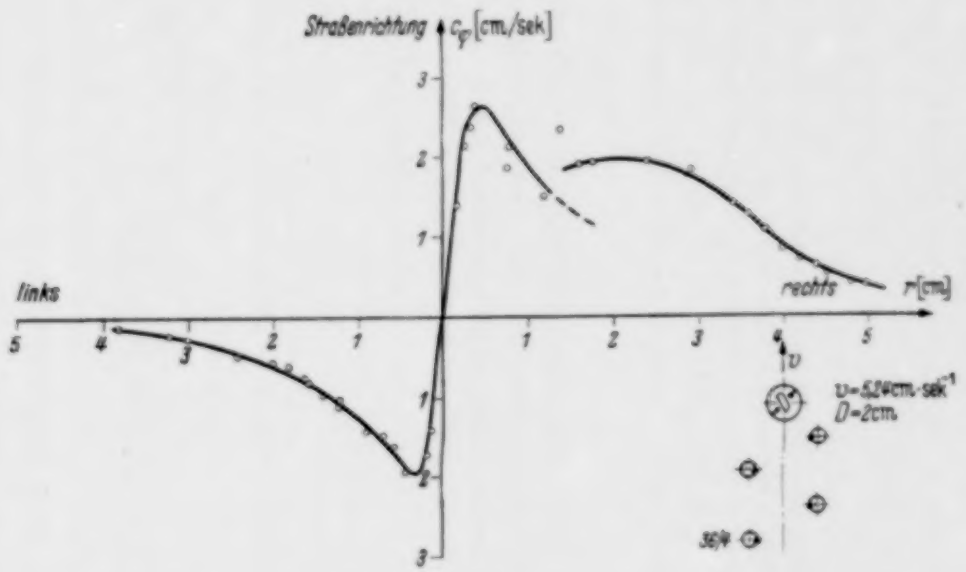


Abb. 8b. Wirbelprofil 36 b/4.

Da dieses Maximum häufig nur flach ausgeprägt ist und sich kleine Meßfehler wegen der Differenz zweier Quadrate erheblich auswirken, wurde außerdem noch aus den Maximalgeschwindigkeiten $c_{\varphi m}$ das Verhältnis

$$\frac{\nu}{\Gamma^2} = \frac{K^2}{\Delta t}\left(\frac{1}{c^2_{\varphi m_2}} - \frac{1}{c^2_{\varphi m_1}}\right) \quad \text{mit} \quad K^2 = 2{,}578 \cdot 10^{-3} \tag{7}$$

gebildet. Mit Hilfe dieser drei Beziehungen kann man die wirksame kinematische Zähigkeit sowohl durch (6) als auch durch (4) und (5) bestimmen, ebenso kann die Wirbelstärke mit (4) und (6) oder (6) und (7) oder (4) und (7) berechnet werden. Weiterhin läßt sich die Wirbelstärke noch aus dem Stromlinienbild durch graphische Integration um den Wirbelkern recht sicher ermitteln.

Die auf die angegebene Weise berechneten Wirbelstärken wiesen auf prinzipielle Unterschiede von Wirbeln aus dem *Re*-Bereich um 200 und dem Bereich um $Re = 1000$ hin. Im *Re*-Bereich 200 waren alle Wirbel fast gleich stark, und die für denselben Wirbel nach den verschiedenen Methoden ermittelten Werte unterschieden sich im allgemeinen nur um ein geringes. Im Mittel betrug die Wirbelstärke

$$\bar{\Gamma} = 5 \pm 0{,}8 \text{ cm}^2/\text{s} \quad \text{bei} \quad Re = 200 .$$

Demgegenüber ergaben sich bei der Bestimmung von Γ im Bereich $Re = 1000$ von Wirbel zu Wirbel wesentliche Unterschiede, über die jedoch keine Gesetzmäßigkeit gefunden werden konnte. So war es beispielsweise möglich, daß der erste Wirbel hinter dem Zylinder die Stärke $\Gamma = 20 \text{ cm}^2/\text{s}$, der nächstfolgende $\Gamma = 10 \text{ cm}^2/\text{s}$ und der dritte $\Gamma = 15 \text{ cm}^2/\text{s}$ hatte. Auch die Wahl der Bestimmungsgleichungen brachte Differenzen bis zu 30% mit sich. So kann man hier dem Mittelwert

$$\bar{\Gamma} = 17{,}5 \pm 7{,}5 \text{ cm}^2/\text{s} \quad \text{bei} \quad Re = 1000$$

nur die Bedeutung einer numerischen Mittelung von Meßergebnissen beimessen.

Die gleiche Tendenz war auch bei der Berechnung des ν-Wertes zu finden. Im Bereich $Re = 1000$ waren die Unterschiede in den Einzelmessungen wieder so groß, daß man jedem Wirbel nur ein individuell gültiges ν zur Zeit der Messung zusprechen kann. Der gemittelte ν-Wert betrug

$$\bar{\nu} = 0{,}09 \text{ cm}^2/\text{s} \quad \text{bei} \quad Re = 1000 ,$$

in den Grenzen

$$\nu = 0{,}02 \text{ bis } \nu = 0{,}2 \text{ cm}^2/\text{s}$$

gegenüber dem mit einem Standardviskosimeter gemessenen

$$\nu_{laminar} = 0{,}01 \text{ cm}^2/\text{s} \quad \text{für Wasser bei } 20^\circ \text{ C}.$$

Dagegen stimmten im Bereich $Re = 200$ die berechneten ν-Werte innerhalb der Fehlergrenze mit dem laminaren Wert überein:

$$\bar{\nu} = 0{,}01 \pm 0{,}003 \text{ cm}^2/\text{s} = \nu_{laminar} \quad \text{bei} \quad Re = 200 .$$

Dies gilt jedoch nicht für verhältnismäßig junge Wirbel, d. h. für Wirbel in Zylindernähe (etwa erster und zweiter Wirbel hinter dem Zylinder). Hier erhöht sich der berechnete Wert bis zu

$$\nu = 0{,}03 \text{ cm}^2/\text{s} \quad \text{bei} \quad Re = 200 .$$

Anschließend sei zur Beurteilung des Gewichts von Einzelmessungen noch das Ergebnis einer Fehlerrechnung mitgeteilt, die für einen speziellen Wirbel durchgeführt wurde. Als Fehler wurden 5% der den Kurven zu entnehmenden Werte angesetzt, mit denen der maximale Fehler der Rechengrößen im jeweils ungünstigsten Fall

$$\frac{\Delta\left(\frac{\Gamma}{\nu}\right)}{\frac{\Gamma}{\nu}} = \pm 60\% \qquad \text{[vgl. (4)]},$$

$$\frac{\Delta\nu}{\nu} = \pm 65\% \qquad \text{[vgl. (6)]},$$

$$\frac{\Delta\left(\frac{\nu}{\Gamma^2}\right)}{\frac{\nu}{\Gamma^2}} = \pm 40\% \qquad \text{[vgl. (7)]}$$

beträgt. Lediglich bei der graphischen Integration der Wirbelstärke liegt der Meßfehler bei

$$\frac{\Delta\Gamma}{\Gamma} = \pm 8\% ,$$

wobei hier allerdings ein systematischer Fehler hinzu kommt durch die räumliche Ausbreitung der Wirbelstärke. Ist diese soweit fortgeschritten, daß sie sich mit den Nachbarwirbeln überschneidet, wird die so gemessene Wirbelstärke zu klein ausfallen. Für die angegebenen Mittelwerte

dürfte der Fehler jedoch wesentlich niedriger sein, da sie sich jeweils aus einer größeren Anzahl ausgewerteter Wirbel ergeben.

5. Deutung der Ergebnisse. Der Vergleich der experimentell gefundenen Wirbelprofile mit dem Geschwindigkeitsverteilungsgesetz von *Hamel-Oseen* ergab Übereinstimmung in den drei wesentlichen Merkmalen des realen Wirbels, dem zeitlichen Kleinerwerden des Geschwindigkeitsanstieges im Wirbelmittelpunkt, dem Sinken der maximalen Umfangsgeschwindigkeit und dem Wachsen des zugehörigen Radius mit der Zeit. Die hiermit berechneten Γ- und ν-Werte stimmten für den betreffenden Wirbel unabhängig von den für die Berechnung herangezogenen Merkmalen überein, wenn auch nicht exakt, so doch größenordnungsmäßig. Daraus läßt sich schließen, daß (2) das Verhalten eines realen Wirbels im Prinzip richtig beschreibt, und daß zweitens die Gleichung (2) auch bei Anwesenheit turbulenzartiger Störungen gültig ist, sofern man für das Symbol ν einen geeigneten Wert einsetzt. In der *Navier-Stokes*-Gleichung hat ν die Bedeutung der kinematischen Zähigkeit gemäß dem *Newton*schen Schubspannungsansatz

$$\tau = \nu \varrho \frac{du}{dy},$$

wobei ν die Eigenschaft eines Stoffbeiwertes hat.

Aus einer Veränderung des ν-Wertes folgt, daß der *Newton*sche Ansatz bei Einsetzen turbulenzartiger Störungen seine Gültigkeit verliert, bzw. daß dem ν keine echte Stoffeigenschaft zukommt. Soll der *Newton*sche Ansatz per definitionem weiter gelten, wie es in der Turbulenztheorie üblich ist, so erhält man zusätzlich zu der laminaren Zähigkeit die „scheinbare Zähigkeit".

Das Verhalten der Wirbel kann man mit dieser Festlegung folgendermaßen deuten:

Der Wirbel entstehe durch Ablösen und Aufrollen der Reibungsschicht des Zylinders. Beide Vorgänge bergen den Keim ungeordneter Bewegung in sich, so daß der gerade entstandene Wirbel mit kleinen Störungen behaftet ist, welche eine scheinbare Zähigkeit hervorrufen. Im Bereich $Re = 200$ klingen diese Störungen rasch ab, so daß bei älteren Wirbeln nur noch die laminare Zähigkeit wirksam ist. Dagegen sind im Bereich um $Re = 1000$ die Störungen entweder von vornherein größer, oder sie wachsen mit der Zeit noch an. Diese kleinen Geschwindigkeitsschwankungen können weiterhin zu endlichen Störungen entarten, wie sie auf den Wirbelprofilen Abb. (5), (6) und (8) zu beobachten sind. Die endlichen Störungen können darüber hinaus zu einer Aufspaltung des Wirbels in mehrere Einzelwirbel führen. Die eigentliche Ursache dieser endlichen Störungen und eine Gesetzmäßigkeit über ihre Entstehung konnte experimentell noch nicht gefunden werden.

Zur Erfassung des Wesens der endlichen Störungen sei ein Gedankenmodell gestattet[1]: Ein Wirbel von einer bestimmten Stärke an setze sich aus mehreren kleineren, sozusagen Elementarwirbeln zusammen. Das Gefüge sei nur lose und kann sich gegeneinander verschieben. Dies macht sich in den Ausbuchtungen der Profile bemerkbar, welche anwachsen und abklingen oder auch zur Auflösung in die Elementarwirbel führen können.

Wenn nun tätsächlich solchen Teilbeträgen der Wirbelstärke eine Verschiebung gegeneinander möglich ist, so ist damit auch ein zusätzlicher Impulsaustausch notwendigerweise verbunden. Das bedeutet, daß zu dem normalen Impulsaustausch auf Grund der Thermomolekularbewegung noch eine zusätzliche Austauschgröße hinzukommt. Damit erhält man einen der vollturbulenten Strömung entsprechenden Ausdruck für den Austausch[2]

$$A = \varrho\, l^2 \left| \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right|,$$

nur daß in diesem Falle die Zahl der Austauschvorgänge kleiner, die Struktur gröber ist und die Individualität der Flüssigkeitsballen länger gewahrt bleibt. Demnach müßte der Wert für die wirksame kinetische Zähigkeit ansteigen, jedoch nicht in dem Maße wie in der vollturbulenten Bewegung. Außerdem ist danach zu erwarten, daß das gemessene ν von der Individualität des einzelnen Wirbels, d. h. von dem zufälligen Verhalten der Elementarwirbel während der Meßzeit, und vielleicht auch von ihrer Anzahl abhängt. Die Messungen im Bereich $Re = 1000$ mit der von Wirbel zu Wirbel verschiedenen Wirbelstärke und dem rund 10fach größeren ν-Wert ließen sich in eine solche Vorstellung ohne Zwang einordnen.

---

[1] *A. Roshko*, Calif. Inst. of Technology. NACA T. N. 2913 (1953). — *L. Schiller*, *A. Naumann*, Ing.-Arch. 9 (1940) S. 335—.

[2] *L. Prandtl*, Führer durch die Strömungslehre, S. 112ff. Braunschweig 1949.

Ebenso würden sich auch die Meßergebnisse der Wirbelstärke einfügen, da die Zahl der Elementareinheiten im Gesamtwirbel nur im statistischen Mittel festgelegt sein möge.

Hierbei soll der Ausdruck „Elementarwirbel" nicht so aufgefaßt werden wie etwa die Quanten der Mikrophysik mit ihrer konstanten, unteilbaren Größe, sondern vielmehr als Gebilde größerer Stabilität als die des Gesamtwirbels.

Damit erhebt sich die Frage von der Stabilität eines Wirbels. Falls eine dimensionslose Kennziffer das Verhalten eines Wirbels ausreichend festlegt und diese Kennziffer die *Reynolds*-Zahl ist, so wäre diese zweckmäßigerweise so zu definieren:

$$Re_w = \frac{d\, c_{\varphi m}}{\nu} = \frac{2\, r_m\, c_{\varphi m}}{\nu}. \tag{8}$$

Gilt weiterhin die *Hamel-Oseen*-Gleichung (2), so ist

$$r_m\, c_{\varphi m} = 0{,}1138\, \Gamma$$

und damit

$$Re_w = 0{,}23\, \frac{\Gamma}{\nu}. \tag{9}$$

Wenn nun während des Entstehungsprozesses zu viele Elementarwirbel zusammengeführt werden, oder mit anderen Worten, wenn die Wirbelstärke zu groß wird, so daß der Wirbel durch eine geringe äußere Störung zum Zerfall gebracht und turbulenzähnliche Strömung erzeugt werden kann, so liegen ähnliche Verhältnisse vor wie z. B. bei der laminaren Rohrströmung in der Nähe der kritischen *Reynolds*-Zahl.

In Analogie dazu könnte man nach einer kritischen *Reynolds*-Zahl fragen, bei der ein Einzelwirbel gerade noch seinen laminaren Charakter bewahrt. Nach den bisher vorliegenden Messungen müßte diese größenordnungsmäßig gleich

$$Re_{w\,krit} = 0{,}23\, \frac{25}{0{,}01} = 570 \tag{10}$$

sein. Dieser Wert muß sicher noch, sofern unsere Überlegungen überhaupt zu Recht bestehen, bei Vorliegen weiteren Versuchsmaterials genauer untersucht werden.

6. Kritische Untersuchungen über das Auswertungsverfahren. Das in Ziff. 4 beschriebene Auswertungsverfahren enthält zwei wesentliche Vereinfachungen, deren Einfluß auf die gewonnenen Ergebnisse im folgenden abgeschätzt werden soll. Die eine Vereinfachung besteht in der Verwendung des *Hamel-Oseen*schen-Geschwindigkeitsgesetzes, welches den wahren Verhältnissen vermutlich nicht genügend nahe kommt. Die zweite liegt darin, daß das Induktionsfeld der Nachbarwirbel nur bei der Bestimmung des Wirbelmittelpunktes berücksichtigt wurde.

a) Einfluß des Wirbelmodells auf die Meßergebnisse. Als Grundlage für die Auswertung der gemessenen Geschwindigkeitsverteilungskurven diente, wie schon erwähnt, die von *Hamel* und *Oseen* berechnete Lösung der *Navier-Stokes*schen-Gleichung für den Einzelwirbel mit der Randbedingung, daß zur Zeit $t = 0$ die Geschwindigkeitsverteilung eines Potentialwirbels vorliege. Diese Lösung ist insofern etwas unbefriedigend, als sie keine Rückschlüsse über die Entstehung und das Verhalten eines sehr jungen Wirbels zuläßt, da die Existenz eines Potentialwirbels physikalisch unmöglich ist (im Mittelpunkt unendlich große Geschwindigkeit und unendlich negativer Druck). Im Zusammenhang mit parallel laufenden Demonstrationsversuchen, bei denen die Wirbelablösung hinter dem Zylinder vom mitfahrenden System aus gefilmt wurde, entstand die Vorstellung für zwei erweiterte Wirbelmodelle[1].

1. Kreiswirbelmodell. Seitlich vom Zylinder löse sich eine Wirbelschicht ab, die sich stromabwärts krümmt und nach Abreißen der Schicht vom Zylinderrand einen geschlossenen Kreis bildet. In diesem Augenblick bestehe der Kreisumfang aus einer gleichmäßigen Folge von Elementarwirbeln mit der Zirkulationsdichte γ. Nach *W. Müller*[2] ist die Wirbelstärke für die längs eines Kreises $r = a$ gleichmäßig ausgebreitete Wirbelschicht

$$w = \frac{\gamma\, a}{8\,\pi\,\nu\, t} \int_0^{2\pi} e^{-\frac{(x - a\cos\varphi)^2 + (y - a\sin\varphi)^2}{4\,\nu\, t}}\, d\varphi. \tag{11}$$

[1] *A. Betz*, Naturwiss. 37 (1950), S. 193; *H. Kaden*, Ing.-Arch.2 (1931), S. 140; *H. Drescher*, Z. Flugwiss. 4 (1956), S. 19.

[2] *W. Müller*, Einführung in die Theorie der zähen Flüssigkeiten, S. 115ff., Leipzig 1932.

Setzt man $x = r\cos\vartheta$ und $y = r\sin\vartheta$, so erhält man nach geeigneter Umformung

$$w = \frac{\gamma a}{4\nu t}\, e^{-\frac{r^2+a^2}{4\nu t}}\, J_0\left(i\,\frac{r a}{2\nu t}\right) \tag{12}$$

und mit Hilfe des *Stokes*schen Satzes die Geschwindigkeitsverteilung

$$c_\varphi = \frac{2}{r}\int_0^r w\, r\, dr = \frac{\gamma a}{2\nu r t}\int_0^r r\, e^{-\frac{r^2+a^2}{4\nu t}}\, J_0\left(i\,\frac{r a}{2\nu t}\right) dr\,. \tag{13}$$

Dieses Integral ist geschlossen nicht lösbar*, und um das numerische Ergebnis möglichst allgemein gültig darzustellen, sei folgende Normierung eingeführt:

$$V = c_\varphi \frac{2\pi\sqrt{4\nu t}}{\Gamma}, \qquad R = \frac{r}{\sqrt{4\nu t}}, \qquad A = \frac{a}{\sqrt{4\nu t}}. \tag{14}$$

Mit diesen dimensionslosen Koordinaten lautet dann die *Hamel-Oseen*sche Geschwindigkeitsverteilung

$$V = \frac{1}{R}\,(1 - e^{-R^2}) \tag{15}$$

und für das Kreiswirbelmodell

$$V = \frac{2}{R}\int_0^R R e^{-(R^2+A^2)}\, J_0(i\,2\,R\,A)\, dR \quad \text{mit} \quad V = c_\varphi \frac{\sqrt{4\nu t}}{a\gamma}. \tag{16}$$

Führt man die *Bessel*-Funktionen über in Reihendarstellung und integriert gliedweise, so erhält man

$$V = \frac{1}{R}\left[1 - e^{-(R^2+A^2)}\left(e^{A^2} + \frac{R^2}{1!}(e^{A^2} - 1) + \frac{R^4}{2!}\left(e^{A^2} - 1 - \frac{A^2}{1!}\right) + \frac{R^6}{3!}\left(e^{A^2} - 1 - \frac{A^2}{1!} - \frac{A^4}{2!}\right) + \cdots\right)\right]. \tag{17}$$

In dieser Darstellung läßt sich leicht übersehen, daß mit verschwindendem Parameterwert A das Wirbelprofil wieder in die *Hamel-Oseen*sche Geschwindigkeitsverteilung übergeht, was dem Ansatz nach auch zu erwarten war. Denn $A = 0$ stellt die Verhältnisse für sehr große Zeiten dar, oder den trivialen Fall, daß der Ringhalbmesser von Anfang an $a = 0$ war. In Abb. 9 sind für verschiedene Parameterwerte die numerisch berechneten Lösungen aufgetragen.

Für große A-Werte weist das Geschwindigkeitsprofil drei Wendepunkte auf, und im Wirbelzentrum geht der Geschwindigkeitsanstieg für kleine Zeiten gegen Null (Abb. 12). Dies sind zwei markante Charakteristika, die an Hand der vorliegenden Meßergebnisse überprüft werden

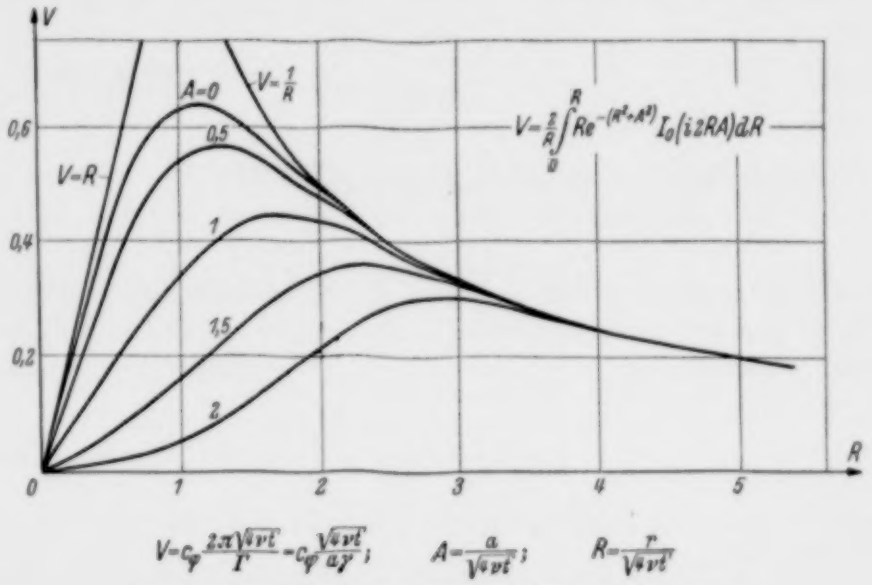


Abb. 9. Theoretische Geschwindigkeitsverteilung im Kreiswirbel.

* Inzwischen ist aus der deutschen Übersetzung des Lehrbuches von *Kotschin*[1] eine funktionentheoretische Lösung der Gleichung (13) bzw. (16) bekannt, in der die Reihenglieder von (17) durch *Bessel*-Funktionen zusammengefaßt werden. Man erhält

$$\text{für} \quad R \leqq A: \quad V = \frac{1}{R}\, e^{-(R^2+A^2)} \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{R}{A}\right)^k I_k(2\,A\,R)\,,$$

$$\text{für} \quad R \geqq A: \quad V = \frac{1}{R}\left[1 - e^{-(R^2+A^2)} \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{A}{R}\right)^k I_k\,(2\,A\,R)\right].$$

[1] *N. J. Kotschin, I. A. Kibel* u. *N. W. Rose*, Theoretische Hydrodynamik, Bd. 2, S. 320, Berlin 1955.

können. Es ist jedoch in keinem Falle auch bei sehr jungen Wirbeln eines der beiden Merkmale, wenigstens innerhalb der Meßgenauigkeit, bemerkt worden. Über den Verlauf des Anstieges im Nullpunkt möge erst im Anschluß an das zweite Wirbelmodell diskutiert werden.

2. Flächenwirbelmodell. Wieder löse sich seitlich vom Zylinder eine Wirbelschicht ab, die sich stromabwärts krümmt und diesmal zu einer Spirale aufrollt. Hat die Spirale den Durchmesser $2a$ erreicht, so reiße die Wirbelschicht am Zylinder ab, und die von der Spirale bedeckte Fläche bilde angenähert eine Kreisfläche, die mit einer gleichmäßigen Dichte von Elementarwirbeln belegt sei. Setzt man wieder die Zirkulationsdichte γ, die jetzt jedoch die Dimension $\sec^{-1}$ habe, und den Kreishalbmesser a, so erhält man für die Wirbelstärke

$$w = \frac{\gamma}{8\pi\nu t}\int_0^a\int_0^{2\pi} a\, e^{-\frac{(x-a\cos\varphi)^2+(y-a\sin\varphi)^2}{4\nu t}}\, da\, d\varphi \tag{18}$$

und mit $x = r\cos\vartheta$, $y = r\sin\vartheta$ und $\varphi - \vartheta = \delta$

$$w = \frac{\gamma}{4\nu t}\int_0^a a\, e^{-\frac{r^2+a^2}{4\nu t}} J_0\left(i\,\frac{ra}{2\nu t}\right) da\,. \tag{19}$$

Unter Benutzung des *Stokes*schen Satzes ist dann die Geschwindigkeit

$$c_\varphi = \frac{2}{r}\int_0^r w\, r\, dr = \frac{2\gamma}{4\nu t}\int_0^a\int_0^r r\, a\, e^{-\frac{a^2+r^2}{4\nu t}} J_0\left(i\,\frac{ra}{2\nu t}\right) da\, dr\,, \tag{20}$$

und nach Einführung der dimensionslosen Koordinaten, wobei analog

$$V = c_\varphi \frac{2\sqrt{4\nu t}}{a^2\gamma}$$

zu setzen ist, ergibt sich

$$V = \frac{4}{A^2 R}\int_0^A\int_0^R R\, A\, e^{-(A^2+R^2)} J_0(i\,2\,R\,A)\, dA\, dR\,. \tag{21}$$

Verwendet man die Integrationsformeln

$$2\, e^{-(A^2+R^2)} J_0(i\,2\,R\,A) = \int_0^\infty e^{-\frac{t^2}{4}} J_0(R\,t)\, J_0(A\,t)\, t\, dt \tag{22}$$

und beachtet, daß

$$\int_0^A A\, J_0(A\,t)\, dA = \frac{A}{t} J_1(A\,t) \qquad \text{(für } R \text{ entsprechend)}, \tag{23}$$

so ist

$$V = \frac{2}{A}\int_0^\infty \frac{e^{-\frac{t^2}{4}}}{t} J_1(A\,t)\, J_1(R\,t)\, dt\,. \tag{24}$$

wobei t einen dimensionslosen Integrationsparameter bedeutet. Auch hier ist eine geschlossene Integration nicht möglich. Nach Auflösung der *Bessel*-Funktionen in unendliche Reihen und gliedweiser Integration ist es zweckmäßig, das Summenschema nach neuen Variablen umzuordnen, und man erhält

$$V = R\sum_{n=0}^{\infty} f(B, C)_n \qquad \text{mit} \begin{cases} B = A^2 + R^2\,, \\ C = A^2\, R^2\,, \end{cases} \tag{25}$$

wobei $f(B,C)_n =$

$$\left.\begin{aligned} &1\left(\frac{1}{1}1-\frac{1}{2}\frac{B}{1!}+\frac{1}{3}\frac{B^2}{2!}-\frac{1}{4}\frac{B^3}{3!}+\cdots-\cdots\right)=\frac{1}{B}(1-e^{-B})\\ &+\frac{C}{2}\left(\frac{1}{3}1-\frac{1}{4}\frac{B}{1!}+\frac{1}{5}\frac{B^2}{2!}-\frac{1}{6}\frac{B^3}{3!}+\cdots-\cdots\right)\\ &+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ &+\frac{C^n}{n!\,(n+1)!}\left(\frac{1}{2n+1}1-\frac{1}{2n+2}\frac{B}{1!}+\frac{1}{2n+3}\frac{B^2}{2!}-\frac{1}{2n+4}\frac{B^3}{3!}+\cdots-\cdots\right)\\ &=\frac{C^n}{n!\,(n+1)!}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{(2n+m+1)}\frac{B^m}{m!}, \end{aligned}\right\} \tag{25b}$$

$$V=R\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m\,C^n\,B^m}{n!\,(n+1)!\,m!\,(2n+m+1)}$$

bedeuten möge. Auch hier erkennt man sofort, daß für $A=0$ ($B=R^2$, $C=0$) die *Hamel-Oseen*sche Geschwindigkeitsverteilung vorliegt.

Aus den in Abb. 10 aufgetragenen Kurven ist zu ersehen, daß die so erhaltenen Wirbelprofile bei gleichen Parameterwerten A wie im Kreiswirbelmodell immer der *Hamel-Oseen*schen Geschwindigkeitsverteilung ähnlich bleiben. Da nun die gemessenen Wirbelprofile ebenfalls der *Hamel-Oseen*schen Geschwindigkeitsverteilung entsprechen, diese aber für sehr kleine Zeiten aus obenerwähnten Gründen sicher falsch ist, läßt sich schließen, daß man mit der Vorstellung des Flächenwirbels den wahren Verhältnissen auch bei sehr jungen Wirbeln sicher näher kommt.

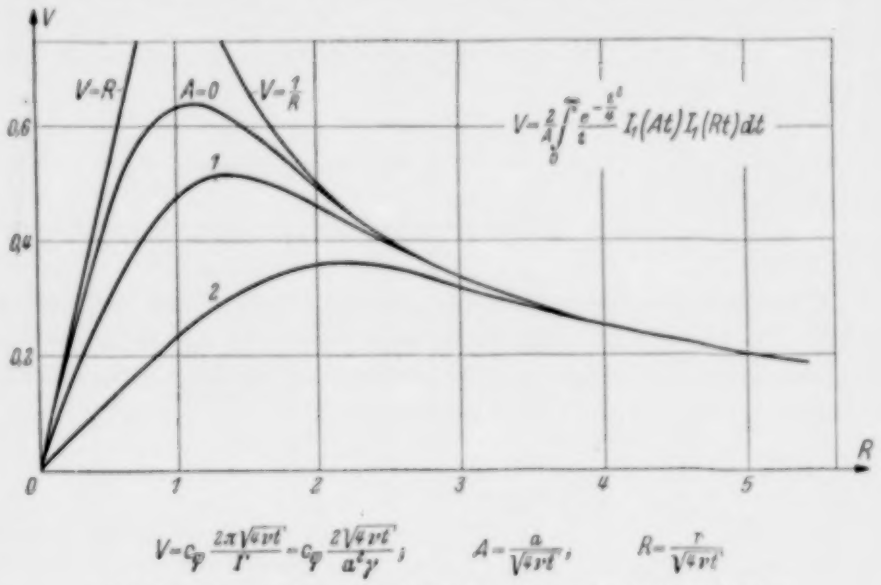


Abb. 10. Theoretische Geschwindigkeitsverteilung im Flächenwirbel.

Es galt daher zu untersuchen, welchen Einfluß die endliche Ausdehnung des Wirbelkernes gegenüber dem *Hamel-Oseen*schen Punktwirbel auf den Impulsaustausch-Vorgang im Innern des Wirbels ausübt, d. h. mit anderen Worten, wie sich die nach dem Flächenwirbelmodell zu berechnende kinematische Zähigkeit ν von der *Hamel-Oseen*schen unterscheidet. Unter Vernachlässigung der Glieder höherer Ordnung erhält man für den Geschwindigkeitsanstieg im Nullpunkt

$$c'_{\varphi_0}=\frac{\Gamma}{2\pi a^2}\left(1-e^{-\frac{a^2}{4\nu t}}\right) \tag{26}$$

und hieraus die kinematische Zähigkeit mit der Änderung der Geschwindigkeitsanstiege zu den Zeiten t_1 und t_2 mit

$$\nu=\frac{a^2}{4\,\Delta t}\left[\frac{1}{\ln\left(1-\frac{c'_{\varphi_{01}}\,2\pi a^2}{\Gamma}\right)}-\frac{1}{\ln\left(1-\frac{c'_{\varphi_{02}}\,2\pi a^2}{\Gamma}\right)}\right]. \tag{27}$$

Man erkennt aus den Klammerausdrücken unter dem Logarithmus, daß der Kernradius nicht beliebig groß sein kann, sondern höchstens

$$a_0^2=\frac{\Gamma}{2\pi c'_{\varphi_0}}. \tag{28}$$

Dies ist jedoch nur zur Zeit $t_1=0$ mit konstantem Anstieg bis zum Kernradius möglich (dann ist gerade $\Gamma=\oint \mathfrak{c}\,d\mathfrak{s}=2\pi a^2 c'_{\varphi_0}$). Zur Darstellung der Funktion $\nu=\nu(a, \Delta c'_{\varphi_0}, \Delta t, \Gamma)$ seien alle

übrigen Werte auf den Wert 1 normiert, und $c'_{\varphi_{02}}/c'_{\varphi_{01}} = 0{,}7$ gesetzt, was etwa den allgemeinen Meßgrößen entspricht. Dann ist

$$\nu = \left(\frac{a}{a_0}\right)^2 \left[\frac{1}{\ln\left[1-\left(\frac{a}{a_0}\right)^2\right]} - \frac{1}{\ln\left[1-0{,}7\left(\frac{a}{a_0}\right)^2\right]}\right]. \tag{29}$$

Aus der graphischen Darstellung Abb. 11 ist zu ersehen, daß bis zu $a/a_0 = 0{,}7$ die Abweichung von ν kleiner als 2%, bei $a/a_0 = 0{,}8$ kleiner als 5% bleibt, und erst bei $a/a_0 = 1$, ein Wert also, der in realer Form nie existieren wird, die kinematische Zähigkeit noch nicht einmal den doppelten Wert annimmt.

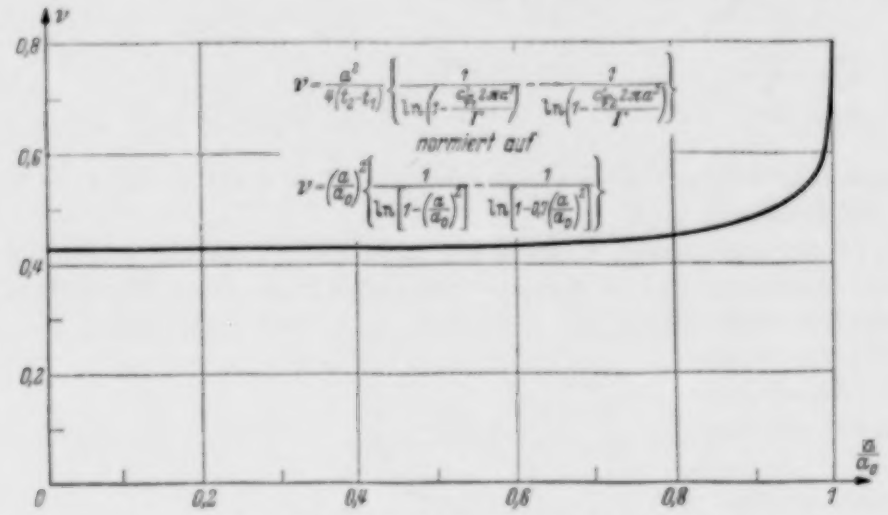


Abb. 11. Kinematische Zähigkeit im Flächenwirbel als Funktion des Kernhalbmessers a.

Mit dieser Rechnung konnte gezeigt werden, daß die nach *Hamel-Oseen* berechnete Austauschgröße für Impuls in weitem Bereich auch für den Flächenwirbel gültig ist. Und weiterhin, daß der mögliche Fehler nur negativ auftritt, d. h. die Größe ν kann nur zu klein, nie zu groß bestimmt werden.

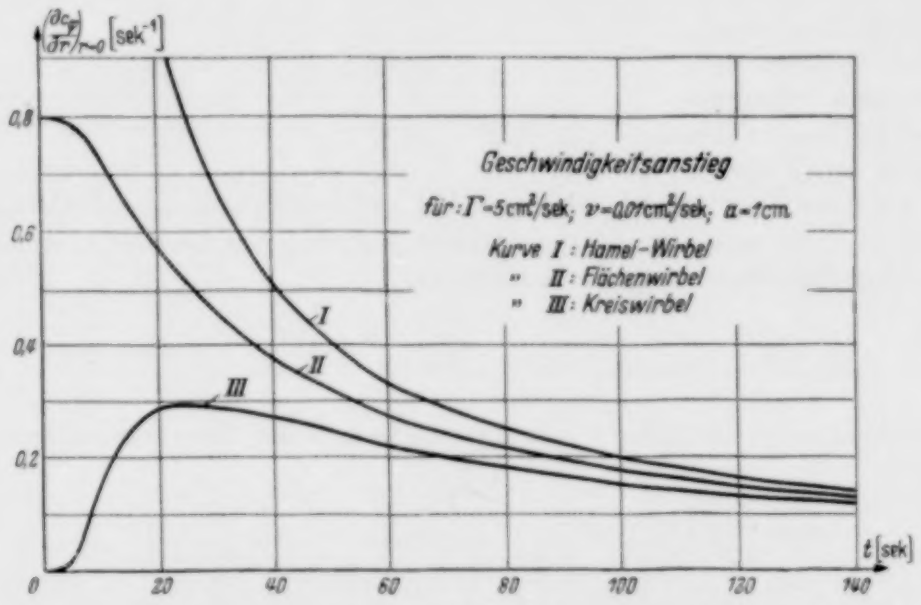


Abb. 12. Geschwindigkeitsanstieg im Wirbelmittelpunkt als Funktion der Zeit t.

Anschließend sei noch ein Meßergebnis vermerkt, welches sich nicht ohne weiteres in das Schema des Flächenwirbels einordnen läßt. Bei mehreren, der Lage nach noch sehr jungen Wirbeln ist zweifelsfrei innerhalb der Meßgenauigkeit ein Wachsen des Geschwindigkeitsanstieges im Nullpunkt gemessen worden. Trägt man wie in Abb. 12 für einen als Beispiel herangezogenen Wirbel mit $\Gamma = 5\ \mathrm{cm^2/s}$, $a = 1\ \mathrm{cm}$, $\nu = 0{,}01\ \mathrm{cm^2/s}$ den zeitlichen Verlauf des Geschwindigkeitsanstieges

im Nullpunkt für die drei besprochenen Wirbelmodelle auf mit

$$\left.\begin{aligned} &\textit{(Hamel-Oseen)} && c'_{\varphi_0} = \frac{\Gamma}{8\,\pi\,\nu\,t} = \frac{20}{t}\,, \\ &\textbf{(Kreiswirbel)} && c'_{\varphi_0} = \frac{\Gamma}{8\,\pi\,\nu\,t}\,e^{-\frac{a^2}{4\,\nu\,t}} = \frac{20}{t}\,e^{-\frac{25}{t}}\,, \\ &\textbf{(Flächenwirbel)} && c'_{\varphi_0} = \frac{\Gamma}{2\,\pi\,a^2}\left(1 - e^{-\frac{a^2}{4\,\nu\,t}}\right) = 0{,}8\left(1 - e^{-\frac{25}{t}}\right), \end{aligned}\right\} \tag{30}$$

so sieht man, daß nur im Falle des Kreiswirbels ein Wachsen des Geschwindigkeitsanstieges erfolgen kann. Da jedoch die gemessenen Wirbelprofile die andern Merkmale des Kreiswirbels nicht aufweisen, läßt sich vermuten, daß die ursprüngliche Wirbelstärkeverteilung wohl flächenhaft angeordnet ist, die Wirbelstärke zum Rande des Kreises jedoch zunimmt. Ein derartiges Bild ließe sich unschwer in die Vorstellung von dem zeitlichen Ablauf der Aufrollung der Wirbelschicht einfügen (Abb. 13).

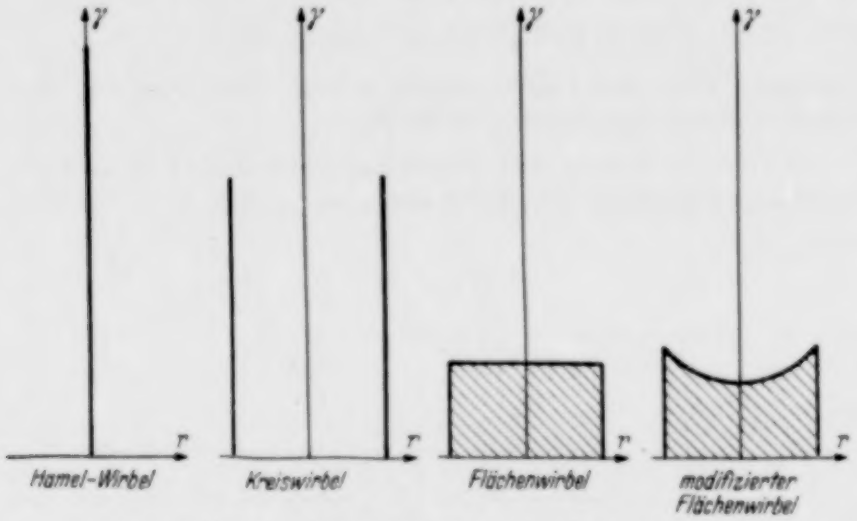


Abb. 13. Wirbelstärkenverteilung zur Zeit $t = 0$.

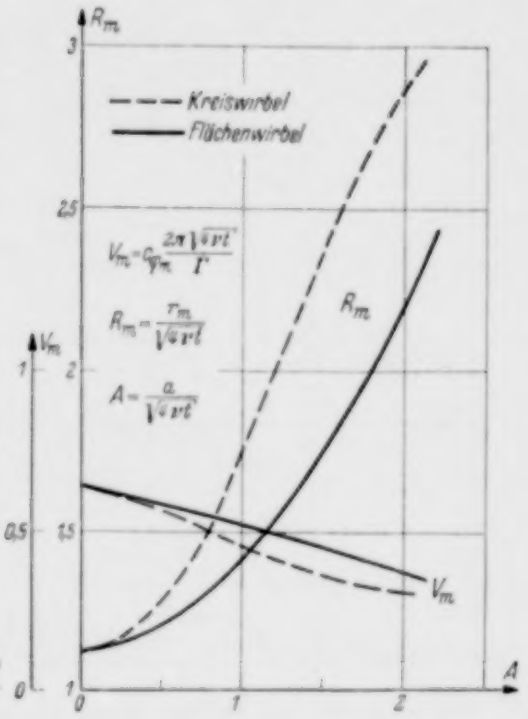


Abb. 14. Normierte maximale Geschwindigkeit V_m und zugehöriger Radius R_m als Funktion des Kernhalbmessers A.

Eine Abschätzung des ursprünglichen Kernhalbmessers, die allerdings nur bei einem alleinstehenden Wirbel zulässig ist, sei hier kurz angedeutet: Die normierte maximale Umfangsgeschwindigkeit V_m und der zugehörige Radius R_m, die sich aus den Gleichungen (17) und (25) explizit schlecht darstellen lassen, werde durch eine Näherungsfunktion aus den numerischen Beispielen Abb. 9 und 10 bestimmt. Beide Größen sind dann nur noch Funktionen des normierten Kernradius A (Abb. 14).

Die gemessenen Werte $c_{\varphi m}$ und r_m normiert man, indem man den unbekannten Wert $\sqrt{4\,\nu\,t} = x$ frei wählt und mit den so gebildeten

$$V_m = c_{\varphi m}\frac{2\,\pi\sqrt{4\,\nu\,t}}{\Gamma} = c_{\varphi m}\frac{2\,\pi}{\Gamma}\,x\,, \qquad R_m = \frac{r_m}{\sqrt{4\,\nu\,t}} = \frac{r_m}{x}$$

in die graphische Darstellung Abb. 14 eingeht. Der gewählte Wert x ist iterativ solange zu verändern, bis die jeweils gefundenen A-Werte übereinstimmen. Dann ist der ursprüngliche Kernhalbmesser

$$a = x\,A\,.$$

Versuchsweise nach diesem Verfahren durchgeführte Rechnungen ergaben für verschiedene Wirbel größenordnungsmäßig

$$a = 0{,}9 \pm 0{,}4\ \text{cm}\,.$$

Hierzu muß nochmals betont werden, daß es sich nur um eine Abschätzung handelt, da das Verfahren nur für alleinstehende Wirbel abgeleitet war. So erhielt man z. B. für denselben Wirbel zu den Zeiten t_1 und t_2 immer etwas unterschiedliche Werte für den ursprünglichen Kernradius.

Den normierten Kernhalbmesser A könnte man noch auf andere Weise bestimmen, wenn man die kritische Größe

$$K = \frac{c_{\varphi m}}{c'_{\varphi_0} r_m} = \frac{V_m}{V'_0 R_m} \tag{31}$$

bildet. Es stellt sich heraus, daß K für den *Hamel-Oseen*-Wirbel eine Invariante, für den Kreis- und Flächenwirbel jedoch eine Funktion von A ist (Abb. 15). Mit dem aus den Meßgrößen $c_{\varphi m}$, c'_{φ_0} und r_m berechneten K könnte man aus der graphischen Darstellung Abb. 15 das A bestimmen, sofern die Meßgenauigkeit dazu ausreicht. Ist aber jeder Wert nur mit einem Fehler von 5% behaftet, so ist

$$\frac{\Delta K}{K} = \pm \left(\frac{\Delta c_{\varphi m}}{c_{\varphi m}} + \frac{\Delta c'_{\varphi_0}}{c'_{\varphi_0}} + \frac{\Delta r_m}{r_m} \right) = \pm 15\% ,$$

und bei einem beispielsweise gemessenen

$$K = 0{,}65 \pm 0{,}1 = 0{,}55—0{,}75$$

erstreckt sich der Fehlerbereich schon über alle für den Flächenwirbel berechneten K-Werte.

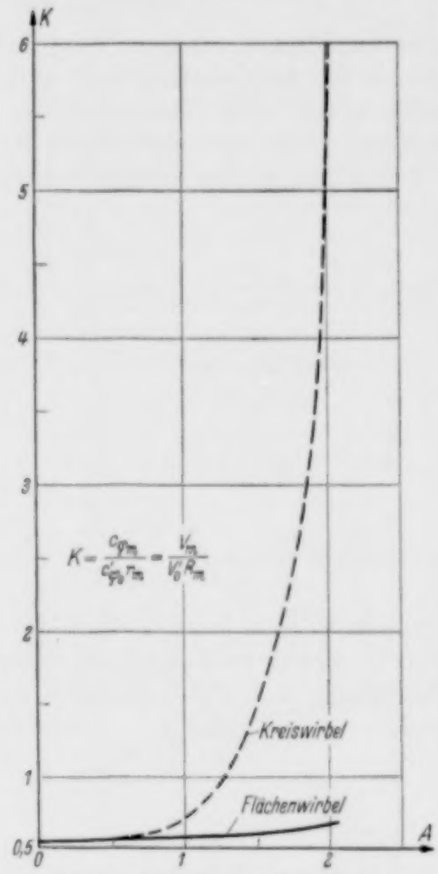


Abb. 15. Kenngröße K als Funktion des Kernhalbmessers A.

b) Die Wirkung der Nachbarwirbel auf den Aufwirbel. Alle bisherigen Betrachtungen gehen von der Voraussetzung aus, daß der zu untersuchende Wirbel, im folgenden mit Aufwirbel bezeichnet, allein in einer ruhenden Flüssigkeit existiert. Für einen Aufwirbel im Verband einer Wirbelstraße ist das nun offensichtlich nicht der Fall, vielmehr wirkt die Umgebung — das sind die Nachbarwirbel — derart auf ihn ein, daß der Wirbel sich mit einer Eigengeschwindigkeit in Richtung auf den Zylinder bewegt. Über den Mechanismus der Induktionswirkung der Nachbarwirbel kann man von vornherein keine exakten Angaben machen, da als Lösung der *Navier-Stokes*schen Differentialgleichung für Wirbelbewegungen nur der Spezialfall des Einzelwirbels bekannt ist.

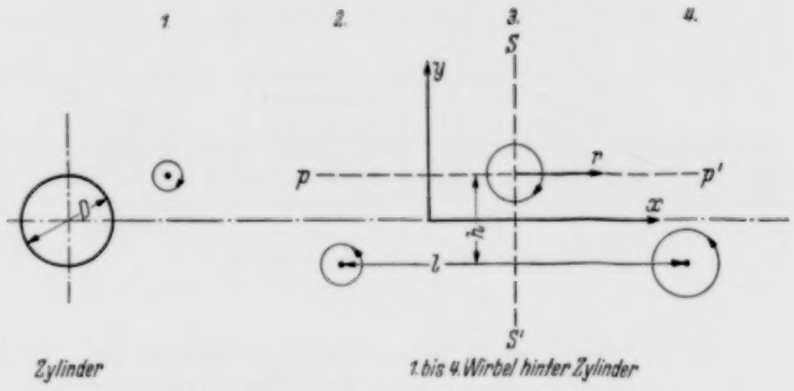


Abb. 16. *Kármán*sche Wirbelstraße. Lage der Achsen SS' und PP'.

Ist die Bewegung eines Wirbels in einem gewissen Bereich, dem „Wirbelkern", mit der eines starren Körpers vergleichbar — und nach den bekannten Experimenten mit gefärbten Wirbelkernen erscheint einem diese Annahme plausibel —, so müßte die Induktion sich nur auf den Wirbelmittelpunkt, analog dem Schwerpunktsatz der Mechanik, auswirken und der Wirbelkern als ganzes die Geschwindigkeit annehmen, die die Nachbarwirbel an der Stelle des Aufwirbelmittelpunktes erzeugen.

Diese Frage läßt sich experimentell entscheiden, wenn man das Geschwindigkeitsprofil des Aufwirbels nicht nur auf der Achse senkrecht zur Wirbelstraße (SS' in Abb. 16) aufnimmt, sondern zusätzlich noch auf der Achse parallel zur Wirbelstraße (PP' in Abb. 16), durch den wahren Wirbelmittelpunkt. Handelt es sich um die Rotation eines starren Körpers, so muß in beiden Fällen der Geschwindigkeitsanstieg im Mittelpunkt der gleiche sein. Aus Abb. 17 und 18 ist zu entnehmen, daß diese Annahme offensichtlich nicht zutrifft. Auf der senkrechten Achse ist der gemessene

Geschwindigkeitsanstieg um 26% kleiner als auf der Parallelachse, auch ist der Unterschied zwischen den beiden mittleren $c_{\varphi m}$ mit 34,5% beträchtlich. Somit kann man auch den innersten Bezirken eines Wirbels kaum die Eigenschaften eines starren Körpers zusprechen.

In der Potentialtheorie der idealen Flüssigkeiten, die sich von der *Euler*schen Gleichung für rotorfreie Strömung ableitet, gilt allgemein das Superpositionsprinzip, nach dem man aus zwei partikulären Integralen der Gleichung durch Addition ein allgemeineres bilden kann. In unserem Falle hieße das, daß sich die resultierende Geschwindigkeit an jedem Ort vektoriell aus den Geschwindigkeitsanteilen der Nachbarwirbel und des Aufwirbels zusammensetzt. Nun ist aber einmal

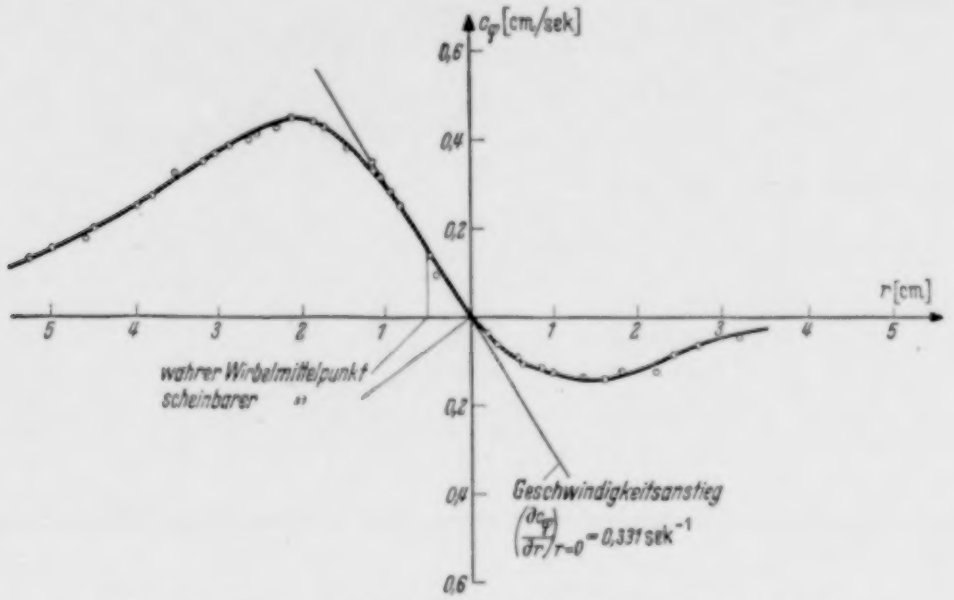


Abb. 17. Gemessenes Wirbelprofil auf der Achse SS' senkrecht zur Wirbelstraße.

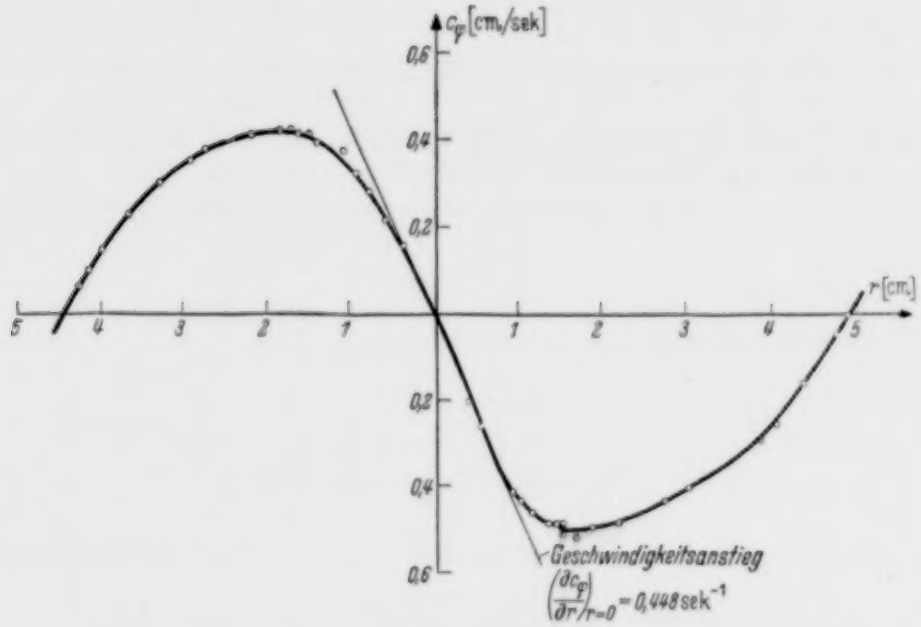


Abb. 18. Gemessenes Wirbelprofil auf der Achse PP' parallel zur Wirbelstraße.

der untersuchte Bereich des Aufwirbels keineswegs rotorfrei, und zum anderen gilt die *Hamel-Oseen*sche Lösung der *Navier-Stokes*-Gleichung nur bei rotationssymmetrischen Anfangsbedingungen. Trotzdem soll versuchsweise das Geschwindigkeitsprofil auf den beiden Achsen nach dem Superpositionsprinzip berechnet werden mit der Annahme, daß die Konvektionsglieder zahlenmäßig keinen allzu großen Einfluß ausüben werden.

Dafür ist es zweckmäßig, nach dem *Hooker*schen Vorgehen[1] alle Nachbarwirbel durch Potentialwirbel zu ersetzen, da in größerer Entfernung der Unterschied zwischen Real- und Potentialwirbel vernachlässigbar klein ist. Dann wird nach *v. Kármán* das Geschwindigkeitspotential

[1] *S. G. Hooker*, Proc. Roy. Soc. A 154 (1936), S. 67.

der Wirbelstraße durch

$$\omega = \frac{i\,\Gamma}{2\,\pi} \lg \frac{\sin \frac{\pi}{l}(z - z_0)}{\sin \frac{\pi}{l}(z + z_0)} \tag{32}$$

dargestellt. Mit dem Aufwirbel an der Stelle

$$z_0 = \frac{l}{4} + i\,\frac{h}{2} \tag{33}$$

ist das Geschwindigkeitsfeld

$$\frac{d\omega}{dz} = u - i\,v = -\frac{i\,\Gamma}{l} \frac{\mathfrak{Cof}\left(\frac{\pi\,h}{l}\right)}{i\,\mathfrak{Sin}\left(\frac{\pi\,h}{l}\right) + \cos\left(\frac{2\,\pi}{l}\,z\right)} \tag{34}$$

und auf der senkrechten Achse SS' mit

$$z = \frac{l}{4} + i\,y \tag{35}$$

die Geschwindigkeit in x-Richtung

$$u = \frac{-\Gamma}{l} \frac{\mathfrak{Cof}\left(\frac{\pi\,h}{l}\right)}{\mathfrak{Sin}\left(\frac{\pi\,h}{l}\right) - \mathfrak{Sin}\left(\frac{2\,\pi}{l}\,y\right)}. \tag{36}$$

An der Stelle des Aufwirbels wird der Potentialwirbel durch einen *Hamel-Oseen*schen Punktwirbel (1) und (2) ersetzt:

$$\begin{aligned} u &= \frac{-\Gamma}{l} \frac{\mathfrak{Cof}\left(\frac{\pi\,h}{l}\right)}{\mathfrak{Sin}\left(\frac{\pi\,h}{l}\right) - \mathfrak{Sin}\left(\frac{2\,\pi}{l}\,y\right)} - \frac{\Gamma}{2\,\pi\,r} + \frac{\Gamma}{2\,\pi\,r}\left(1 - e^{-\frac{r^2}{4\,\nu\,t}}\right) \\ &= \frac{-\Gamma}{l} \frac{\mathfrak{Cof}\left(\frac{\pi\,h}{l}\right)}{\mathfrak{Sin}\left(\frac{\pi\,h}{l}\right) - \mathfrak{Sin}\left(\frac{2\,\pi}{l}\,y\right)} - \frac{\Gamma}{2\,\pi\,r}\,e^{-\frac{r^2}{4\,\nu\,t}}, \end{aligned} \tag{37}$$

wobei

$$r = y - \frac{h}{2} \tag{38}$$

ist. Wird in (37) y durch r gemäß (38) ersetzt, so folgt

$$u = \frac{-\Gamma}{l} \frac{\mathfrak{Ctg}\left(\frac{\pi\,h}{l}\right)}{1 - \mathfrak{Ctg}\left(\frac{\pi\,h}{l}\right)\mathfrak{Sin}\left(\frac{2\,\pi}{l}\,r\right) - \mathfrak{Cof}\left(\frac{2\,\pi}{l}\,r\right)} - \frac{\Gamma}{2\,\pi\,r}\,e^{-\frac{r^2}{4\,\nu\,t}}. \tag{39}$$

Für kleine r entwickelt man mit $\mathfrak{Sin}\,r \approx r$ und $\mathfrak{Cof}\,r \approx 1 + 1/2\,r^2$ die Gleichung (39):

$$\left.\begin{aligned} u_0 &= \Gamma\left[\frac{\mathfrak{Ctg}\left(\frac{\pi\,h}{l}\right)}{2\,\pi\,r\,\mathfrak{Ctg}\left(\frac{\pi\,h}{l}\right) + \frac{2\,\pi^2}{l}\,r^2} - \frac{1}{2\,\pi\,r} + \frac{r}{8\,\pi\,\nu\,t}\right] \\ &= \Gamma\left[\frac{-\frac{1}{2\,l}\,\mathfrak{Tg}\left(\frac{\pi\,h}{l}\right)}{1 + \frac{\pi}{l}\,\mathfrak{Tg}\left(\frac{\pi\,h}{l}\right)r} + \frac{r}{8\,\pi\,\nu\,t}\right] \\ &= \Gamma\left[\frac{-\frac{1}{2\,\pi}}{\frac{l}{\pi}\,\mathfrak{Ctg}\left(\frac{\pi\,h}{l}\right) + r} + \frac{r}{8\,\pi\,\nu\,t}\right] \end{aligned}\right\} \tag{40}$$

In dem Beispiel aus Abb. 17 und 18 waren die dazugehörigen Werte

$$\left.\begin{array}{ll} h = 1{,}9\text{ cm} & \Gamma = 5\text{ cm}^2/\text{s} \\ l = 9{,}1\text{ cm} & 4\,\nu\,t = 2{,}5\text{ cm}^2 \end{array} \quad \left(\begin{array}{l}\text{nach } \textit{Hamel-Oseen} \\ \text{berechnet.}\end{array}\right)\right\} \tag{41}$$

Die mit den Werten berechnete Kurve konnte mit der gemessenen besser in Übereinstimmung gebracht werden, wenn man

$$\Gamma = 5{,}73\text{ cm}^2/\text{s} \tag{41a}$$

setzte. Dann lautet (39)

$$u = \frac{-1{,}094}{1 - 1{,}738 \cdot \mathfrak{Sin}\,(0{,}69\,r) - \mathfrak{Cof}\,(0{,}69\,r)} - \frac{0{,}913}{r}\,e^{-\frac{r^2}{2{,}3}} \tag{42}$$

und (40)

$$u_0 = \frac{-0{,}912}{5{,}03 + r} - 0{,}365\,r\,. \tag{43}$$

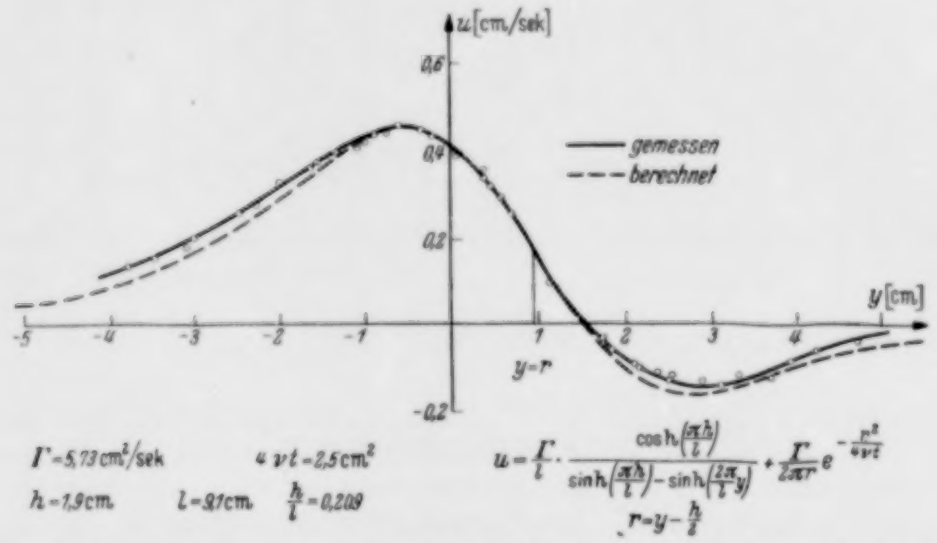


Abb. 19. Gemessenes und berechnetes Wirbelprofil auf der Achse SS' senkrecht zur Wirbelstraße.

In Abb. 19 sind das berechnete und das gemessene Wirbelprofil für die Achse senkrecht zur Wirbelstraße SS' eingetragen. Nach dem gleichen Verfahren soll nun die Geschwindigkeitsverteilung in y-Richtung auf der zur Straße parallelen Achse PP' berechnet werden. Gleichung (35) lautet jetzt

$$z = x + i\,\frac{h}{2} \tag{44}$$

und entsprechend (36)

$$v = \frac{\Gamma}{l}\,\frac{\cos\left(\frac{2\pi}{l}\,x\right)}{\mathfrak{Tg}^2\left(\frac{\pi h}{l}\right)\left[1 - \sin\left(\frac{2\pi}{l}\,x\right)\right]^2 + \cos^2\left(\frac{2\pi}{l}\,x\right)}\,. \tag{45}$$

Nach zweckmäßiger Umformung ist

$$v = \frac{\Gamma}{l}\,\frac{\mathfrak{Cof}^2\left(\frac{\pi h}{l}\right)\cos\left(\frac{2\pi}{l}\,x\right)}{2\,\mathfrak{Sin}^2\left(\frac{\pi h}{l}\right)\left[1 - \sin\left(\frac{2\pi}{l}\,x\right)\right] + \cos^2\left(\frac{2\pi}{l}\,x\right)}\,. \tag{46}$$

Wieder wird der Aufwirbel durch einen Realwirbel ersetzt [vgl. (37)]:

$$v = \frac{\Gamma}{l}\,\frac{\mathfrak{Cof}^2\left(\frac{\pi h}{l}\right)\cos\left(\frac{2\pi}{l}\,x\right)}{2\,\mathfrak{Sin}^2\left(\frac{\pi h}{l}\right)\left\{1 - \sin\left(\frac{2\pi}{l}\,x\right)\right\} + \cos^2\left(\frac{2\pi}{l}\,x\right)} + \frac{\Gamma}{2\pi r}\,e^{-\frac{r^2}{4\nu t}} \tag{47}$$

mit

$$r = x - \frac{l}{4}\,. \tag{48}$$

Wird x durch (48) ausgedrückt, erhält man

$$v = \frac{-\Gamma}{l} \frac{\operatorname{Cof}^2\left(\frac{\pi h}{l}\right) \sin\left(\frac{2\pi}{l} r\right)}{2 \operatorname{Sin}^2\left(\frac{\pi h}{l}\right)\left\{1 - \cos\left(\frac{2\pi}{l} r\right)\right\} + \sin^2\left(\frac{2\pi}{l} r\right)} + \frac{\Gamma}{2\pi r} e^{-\frac{r^2}{4\nu t}}. \tag{49}$$

Geht $r \to 0$, wird $\sin(a r) \approx a r$, $\cos(a r) \approx 1 - 1/2\, a^2 r^2$ und (49)

$$\left.\begin{aligned} v_0 &= \frac{-\Gamma}{l} \frac{\operatorname{Cof}^2\left(\frac{\pi h}{l}\right) \frac{2\pi}{l} r}{2 \operatorname{Sin}^2\left(\frac{\pi h}{l}\right) \frac{2\pi^2 r^2}{l^2} + \frac{4\pi^2 r^2}{l^2}} + \frac{\Gamma}{2\pi r} - \frac{\Gamma r}{8\pi \nu t} \\ &= \Gamma \left[\frac{-\operatorname{Cof}^2\left(\frac{\pi h}{l}\right)}{2 \operatorname{Sin}^2\left(\frac{\pi h}{l}\right) \pi r + 2\pi r} + \frac{1}{2\pi r} - \frac{r}{8\pi \nu t} \right] \\ &= \Gamma \left[\frac{-\operatorname{Cof}^2\left(\frac{\pi h}{l}\right)}{\left[\operatorname{Sin}^2\left(\frac{\pi h}{l}\right) + 1\right] 2\pi r} + \frac{1}{2\pi r} - \frac{r}{8\pi \nu t} \right] \\ &= \frac{-\Gamma r}{8\pi \nu t}. \end{aligned}\right\} \tag{50}$$

Mit den in (41) und (41a) angegebenen Zahlen lautet (49)

$$v = \frac{0{,}942 \sin(0{,}69\, r)}{0{,}991\,[1 - \cos(0{,}69\, r)] + \sin^2(0{,}69\, r)} + \frac{0{,}913}{r} e^{-\frac{r^2}{2{,}5}} \tag{51}$$

und (50)

$$v_0 = -0{,}365\, r\,. \tag{52}$$

Abb. 20 zeigt das berechnete und das gemessene Wirbelprofil ebenso wie Abb. 19 in bemerkenswerter Übereinstimmung, sofern man die grundsätzlichen Bedenken gegen das Verfahren und die Vereinfachungen des Ansatzes beachtet. Setzt doch das *Kármán*sche Geschwindigkeitspotential

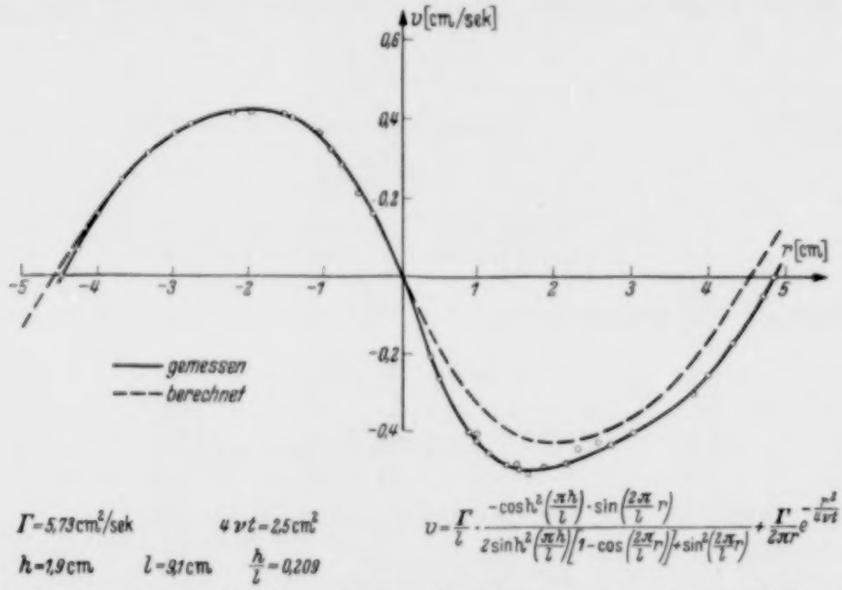


Abb. 20. Gemessenes und berechnetes Wirbelprofil auf der Achse PP' parallel zur Wirbelstraße.

eine beiderseits unendliche lange Wirbelstraße in aequidistanter Anordnung mit konstanter Wirbelstärke voraus. In Wirklichkeit ist die Straße nicht unendlich, wird die Straßenbreite h mit zunehmendem Abstand vom Zylinder größer und sind die Stärken der Wirbel nur in einem Bereich von $\pm 16\%$ (s. S. 212) untereinander gleich.

Da das Superpositionsprinzip dem tatsächlichen Mechanismus verhältnismäßig gut entspricht, ist hiermit die wesentlichste Meßgröße, der Geschwindigkeitsanstieg im Wirbelmittelpunkt, zu untersuchen. Nach (40) beträgt er auf der senkrechten Achse SS', auf welcher allgemein die Auswertung erfolgte,

$$\left(\frac{\partial u_0}{\partial r}\right) = u_0' = \frac{\Gamma}{2\pi (Z+r)^2} + \frac{\Gamma}{8\pi \nu t} \quad \text{mit } Z = \frac{l}{\pi} \operatorname{Ctg}\left(\frac{\pi h}{l}\right). \tag{53}$$

Wird die Gleichung nach νt aufgelöst:

$$\nu t = \frac{\Gamma}{8\pi \left(u_0' - \dfrac{\Gamma}{2\pi (Z+r)^2}\right)}, \tag{54}$$

so läßt sich ν aus den Meßwerten zu den Zeiten t_1 und t_2 bestimmen [vgl. (4)]:

$$\nu = \frac{\Gamma}{8\pi \Delta t}\left[\frac{1}{u_{01}' - \dfrac{\Gamma}{2\pi (Z+r)^2}} - \frac{1}{u_{02}' - \dfrac{\Gamma}{2\pi (Z+r)^2}}\right]$$

$$= \frac{\Gamma}{8\pi \Delta t} \frac{u_{01}' - u_{02}'}{u_{01}' u_{02}' + (u_{21}' + u_{02}') Z' + Z'^2} \quad \text{mit } Z' = \frac{\pi \Gamma \operatorname{Tg}^2\left(\dfrac{\pi h}{l}\right)}{2 l^2}. \tag{55}$$

Aus einer zahlenmäßigen Durchrechnung an Hand der vorliegenden Meßdaten ergibt sich der Unterschied zu dem mit (4) berechneten Wert zu

$$\frac{\Delta \nu}{\nu} = Z'\left(\frac{1}{u_{01}'} + \frac{1}{u_{02}'} + \frac{Z'}{u_{01}' u_{02}'}\right) = +\,21\%\,.$$

Das bedeutet, daß das oben angegebene Auswertungsverfahren mit einem systematischen Fehler behaftet ist, der sich aber im Vergleich zur sonstigen Meßgenauigkeit nicht erheblich auswirken dürfte. Da das Vorzeichen des Fehlers eindeutig ist, läßt sich sagen, die berechnete kinematische Zähigkeit wird auf Grund der Induktion der Nachbarwirbel um einen begrenzten Betrag zu groß gemessen.

7. Zusammenfassung. Es wird über eine experimentelle Arbeit aus dem Hermann Föttinger-Institut an der Technischen Universität Berlin-Charlottenburg berichtet, in welcher die Geschwindigkeitsverteilung in Wirbeln einer *Kármán*schen Wirbelstraße bestimmt wurde. Die Messung erfolgte durch Photographieren der markierten Flüssigkeitsoberfläche. Unter Zugrundelegung des *Hamel-Oseen*schen Geschwindigkeitsgesetzes für den realen Wirbel mit

$$c_\varphi = \frac{\Gamma}{2\pi r}\left(1 - e^{-\frac{r^2}{4\nu t}}\right)$$

konnte die wirksame kinematische Zähigkeit ν und die Zirkulation Γ berechnet werden. Für Wirbel im Bereich einer kritischen Größe wurde die kinematische Zähigkeit ν rund 10fach größer als mit einem Standardviskosimeter bestimmt. Unterhalb der kritischen Größe ergab die Zähigkeit nur kurz nach der Entstehung der Wirbel einen erhöhten, danach jedoch den normalen laminaren Wert. Als Deutungsmöglichkeit der Meßergebnisse wird ein turbulenzartiger Impulsaustauschvorgang in Übereinstimmung mit Autoren theoretischer Arbeiten angegeben.

In einem weiteren Abschnitt wird das Auswertungsverfahren bezüglich des verwandten Wirbelmodells und der Induktion der Nachbarwirbel einer kritischen Betrachtung unterzogen. Es konnte gezeigt werden, daß das Verfahren vermutlich mit systematischen Fehlern behaftet ist, diese aber größenordnungsmäßig unterhalb der beobachteten Effekte liegen.

(Eingegangen am 6. September 1956)

Anschrift des Verfassers: Dr. *A. Timme*, Hermann-Föttinger-Institut für Strömungstechnik, Berlin-Charlottenburg, Hardenbergstr. 34.

Berichtigung

zu meiner Arbeit S. 90 dieses Bandes „Über die Biegung des orthotropen Plattenstreifens durch Einzellasten"

Von S. Woinowsky-Krieger

Die erste Gleichung (2) muß richtig

$$\lambda = \sqrt[4]{\frac{B_1}{B_2}} \qquad \text{statt} \qquad \lambda = \sqrt{\frac{B_1}{B_2}}$$

heißen.

(Eingegangen am 14. März 1957.)

Praktische Winke zum Studium der Statik. Grundlagen. Anwendungen. Rechenkontrollen.

Von Dr.-Ing. habil. **Ernst Kohl,** o. Professor an der Technischen Hochschule Braunschweig. Mit 208 Abbildungen. VIII, 224 Seiten Gr.-8°. 1957.

Ganzleinen DM 18,—

Inhaltsübersicht: Die Stabilitätsbedingungen ebener Tragwerke und ihre Anwendung. — Die Aufgabe der Statik. — Die Lösung der Gleichgewichtsaufgabe. — Einflußlinien. — Die Lösung der Formänderungsaufgabe. — Querbelastete Balken mit Längskraft. — Statisch unbestimmte Tragwerke. — Stabilität räumlicher Tragwerke. — Sachverzeichnis.

Bei dieser Neuerscheinung handelt es sich nicht um ein Lehrbuch der Statik im üblichen Sinne. Die kurz gehaltenen „Praktischen Winke" wenden sich in erster Linie an den Studierenden, geben aber auch dem im Beruf stehenden Statiker mit ihren zahlreichen, an Beispielen durchgeführten Rechenkontrollen wertvolle Hinweise. Die Grundlagen sind klar herausgestellt. Ausführlich behandelte Beispiele mit verschiedenen Lösungsmöglichkeiten und deren Vor- und Nachteile machen mit den Anwendungen vertraut. Statisch unbestimmte Tragwerke sind nach den Kraftgrößen- und Formänderungsgrößenverfahren berechnet. Die zu lösenden Aufgaben werden von verschiedenen Seiten aus beleuchtet.

Statik der Tragwerke.

Von Dr.-Ing. habil. **Walther Kaufmann,** o. Professor an der Technischen Hochschule München. (Handbibliothek für Bauingenieure. Ein Hand- und Nachschlagebuch für Studium und Praxis. Begr. von Robert Otzen. Neue Reihe herausgegeben von Prof. Dr.-Ing. Dr.-Ing. E. h. **Ferd. Schleicher.**) Vierte ergänzte und verbesserte Auflage. Mit 367 Abbildungen. VIII, 327 Seiten Gr.-8°. 1957. Ganzleinen DM 31,50

Inhaltsübersicht: Erster Abschnitt: **Allgemeine Grundlagen.** Begriff und Aufgabe der Statik. Die äußeren Kräfte. Die inneren Kräfte. Die Gleichgewichtsbedingungen des starren Körpers und das Prinzip der virtuellen Verrückungen. Statisch bestimmte und statisch unbestimmte Systeme. Die Einflußlinie. Die Grundgleichungen der Statik des stabförmigen Trägers. Die Grundlagen der Fachwerktheorie. — Zweiter Abschnitt: **Momente, Quer- und Normalkräfte an statisch bestimmten Stabwerken.** Der einfache Balken. Freiträger, Balken mit überkragenden Enden und Gerberträger. Dreigelenkbogen und verwandte Systeme. — Dritter Abschnitt: **Ermittlung der Spannkräfte statisch bestimmter Fachwerke.** Statische Verfahren für das ebene Fachwerk. Die kinematische Methode. Räumliche Fachwerke. — Vierter Abschnitt: **Die elastischen Formänderungen.** Das Prinzip der virtuellen Verrückungen. Die Sätze von der Gegenseitigkeit der elastischen Formänderungen. Der Castiglianosche Satz vom Differentialquotienten der Formänderungsarbeit. Die Biegungslinie. Vollständige Darstellung der Formänderung ebener Systeme. — Fünfter Abschnitt: **Theorie der statisch unbestimmten Systeme.** Einführung. Das statisch bestimmte Hauptsystem. Die Elastizitätsgleichungen für die statisch unbestimmten Größen. Auflösung der allgemeinen Elastizitätsgleichungen. Einführung statisch unbestimmter Hauptsysteme. Reduktionssatz. Aufstellung von Elastizitätsgleichungen mit nur einer Unbekannten. Einführung von Formänderungsgrößen als Unbekannte. Berechnung statisch unbestimmter Stabwerke durch Momentenausgleich. — Sechster Abschnitt: **Statisch unbestimmte Tragwerke.** Der durchlaufende Träger. Der beiderseits eingespannte Träger. Der Träger auf elastischer Unterlage. Rahmen. Bogenträger. Durch einen einfachen Balken versteifte Gelenkbögen und Ketten. Durch einen über drei Öffnungen laufenden Vollwandträger versteifte Kette. Dreifach statisch unbestimmter Bogen über drei Öffnungen. Brückenträgerrost mit drillsteifen Hauptträgern. Einführung in die Theorie zweiter Ordnung (Verformungstheorie). — **Sachverzeichnis.**

SPRINGER-VERLAG · BERLIN / GÖTTINGEN / HEIDELBERG

Mathematische Statistik.

Von Dr. **B. L. van der Waerden**, Professor der Mathematik an der Universität Zürich. (Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Band 87.) Mit 39 Textfiguren und 13 Zahlentafeln. IX, 360 Seiten Gr.-8°. 1957. DM 46,—; Ganzleinen DM 49,60

Inhaltsübersicht: Allgemeine Grundlagen. — Wahrscheinlichkeiten und Häufigkeiten. — Mathematische Hilfsmittel. — Empirische Bestimmung von Verteilungsfunktionen, Mittelwerten und Streuungen. — Fourier-Integrale und Grenzwertsätze, — Gaußsche Fehlertheorie und Students Test. — Die Methode der kleinsten Quadrate. — Schätzung unbekannter Konstanten. — Auswertung von beobachteten Häufigkeiten. — Bio-Auswertung. — Prüfung von Hypothesen durch Tests. — Anordnungstests. — Korrelation. — Tafeln. — Leitfaden.

Das vorliegende Buch ist aus einer langjährigen Beschäftigung mit den praktischen Anwendungen hervorgegangen. Seit der Studentenzeit wurden dem Verfasser immer wieder statistische Fragen von Volkswirtschaftlern, Medizinern, Physiologen, Biologen und Ingenieuren vorgelegt. Durch Nachdenken und Literaturstudium lernte er immer bessere Methoden kennen. Diese Methoden werden im vorliegenden Buch begründet und auf möglichst lehrreiche Beispiele aus den Natur- und Sozialwissenschaften angewandt. Der Verfasser hofft, dem Leser so manche Irrwege zu ersparen.

Die Beispiele sind nicht aus der Theorie heraus konstruiert, sondern der Praxis entnommen; daher waren bei manchen Beispielen ausführliche Erläuterungen notwendig. Die mathematischen Grundbegriffe sind so kurz wie möglich, aber doch verständlich dargestellt. Manchmal waren längere theoretische Ausführungen notwendig, aber wo immer möglich, wurde für schwierige Beweise auf gute existierende Lehrbücher verwiesen.

Wahrscheinlichkeitstheorie.

Von Dr. **Hans Richter**, o. Professor für Mathematische Statistik und Wirtschaftsmathematik an der Universität München. (Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Band 86.) Mit 14 Textabbildungen, XII, 435 Seiten Gr.-8°. 1956. DM 66,—; Ganzleinen DM 69,60

Inhaltsübersicht: **I. Maßtheoretische Grundlagen.** Die Mengenalgebra. Mengenkörper. Punkt- und Mengenfunktionen. Konstruktion eines Maßes aus einem Inhalt. Intervallmaße im R^n. — **II. Der Wahrscheinlichkeitsbegriff.** Die intuitive Wahrscheinlichkeit. Die naturwissenschaftliche Wahrscheinlichkeit. Die Häufigkeitsinterpretation und die Normierungsforderung. Der mathematische Wahrscheinlichkeitsbegriff. — **III. Die Elemente der Wahrscheinlichkeitstheorie.** Die Grundbegriffe. Die Grundtheoreme im Fall der Laplace-Experimente. Die allgemeine Gültigkeit der Grundtheoreme. Einige einfache Folgerungen aus den beiden Grundtheoremen. Behandlung einiger Aufgaben. Relaisexperimente und Bayessches Theorem. Zufällige Größen. Der Übergang zur abstrakten Wahrscheinlichkeitstheorie. — **IV. Elemente der Integrationstheorie.** μ-meßbare Funktionen. μ-integrable Funktionen. Quadratintegrierbarkeit. Maßprodukte. — **V. Zufällige Größen auf allgemeinen Wahrscheinlichkeitsfeldern.** Idealisierte Experimente und Vergröberungen. Wahrscheinlichkeitsdichten. Unabhängige zufällige Größen. Erwartungswerte, Momente, Varianzen. Bedingte Erwartungswerte und Verteilungen. Charakteristische Funktionen zufälliger Größen. Die Konvergenz von Verteilungsfunktionen. — **VI. Spezielle Wahrscheinlichkeitsverteilungen.** Die Γ-Funktion und die Γ-Verteilungen. Die Multinomialverteilungen. Die Gauß-Verteilung. Einige mit der Normalverteilung zusammenghängende Verteilungen. — **VII. Die Konvergenz zufälliger Größen.** Definitionen und allgemeine Sätze. Grenzwertsätze für Bernoulli-Experimente. Allgemeine Konvergenzkriterien. Der zentrale Grenzwertsatz. Lösungen der Aufgaben. Literaturverzeichnis. Namen- und Sachverzeichnis.

SPRINGER-VERLAG · BERLIN / GÖTTINGEN / HEIDELBERG

Springer-Verlag · Berlin / Göttingen / Heidelberg. Printed in Germany. V/12/6 0,8 K.B./Z. 040.